

CRITERIOS DIFUSOS EN LA SELECCIÓN DE CARTERAS

Christian Camilo Vargas R., Universidad Piloto de Colombia

RESUMEN

La gestión activa de portafolios reconoce el carácter subjetivo de la distribución óptima de activos. Aunque las prevenciones e intereses del agente permiten orientar la búsqueda, hay una brecha entre el modelo que señala la combinación de activos que coincide con un nivel insuperable de la relación entre el riesgo de mercado y rendimiento del portafolio, y la combinación de activos que al mismo tiempo garantice la máxima satisfacción del agente, producto de un acertado ajuste del rendimiento esperado y riesgo del portafolio a las expectativas del inversionista. Esta exposición pretende señalar y definir las propiedades de los medios que permiten incorporar la segunda condición de una cartera óptima.

PALABRAS CLAVE: Curva de Indiferencia, Frontera Eficiente, Conformidad, Utilidad, Multivalencia.

ABSTRACT

Active portfolio management recognizes the subjective nature of optimal asset distribution in a portfolio. While agent's interest can guide the selection of optimal asset distribution. There is a gap between optimal assets selection through models that consider market risk and portfolio selection and the agent's own selection of a portfolio that maximizes his/her expectations. Agents also consider expected return and portfolio risk to investor expectations. This study aims to find ways to incorporate the investors' expectation on expected return and portfolio risk.

JEL: G11, G1, G13, G15

KEYWORDS: indifference curve, efficient frontier, compliance, utility, multivalency.

INTRODUCCIÓN

Obedecer el principio de diversificación plantea varios retos para quien busca la combinación óptima de activos en un portafolio, y es en su eje vertebral donde deben hacerse extensivos los ajustes preliminares, de manera que junto a los arreglos residuales se conserve la armonía necesaria para obtener un efecto neto positivo en la eficiencia y la eficacia de la búsqueda. En este sentido, la singularidad de los intereses de un agente sobresale al hacer evidente el carácter subjetivo de la disposición óptima de activos en un portafolio. Será óptima una combinación de activos si la distribución acierta en un punto inmejorable de la relación entre las variables de decisión (riesgo y rendimiento), pero dentro de los límites y bajo las condiciones definidas por las necesidades e intereses del agente: el rendimiento que requiera y los niveles de exposición al riesgo dentro de los cuales está dispuesto a obtenerlo. He aquí que se distingue entre dos enfoques desde los que pueden ser vistas las variables de decisión. El primero, es el modo en el que son “objetivamente” valoradas a partir del análisis de sus registros históricos o del comportamiento visto o esperado de variables de las cuales pueda depender. Y el segundo será el que llegue a darle un agente dado en términos de la satisfacción y/o utilidad que le pueda proveer.

Resolviendo la primera condición de un portafolio óptimo, el modelo de media-varianza (Markowitz H. 1952) distingue de las múltiples formas de disponer un grupo de activos, un sub-conjunto al que el autor denomina eficiente, mediando los criterios de un agente racional, el cual buscará la menor exposición al

riesgo (bajo el supuesto de aversión) y la mejor retribución posible por el riesgo implicado. Partiendo de una relación inversa entre las variables de decisión obtiene para cada nivel operable de exposición al riesgo, un rendimiento que integra el conjunto eficiente (Sharpe W. 1970, 53), seleccionando la mejor retribución que puede obtenerse al combinar un grupo de activos. Dependiendo del tipo de asociación entre los activos, el rendimiento eficiente que corresponda a un nivel de riesgo dado cambiará, al punto de corresponder a una exposición al riesgo de cero, cuando la asociación toma un valor extremo en el que un subconjunto de los activos del portafolio se conduce de forma opuesta y en una magnitud equivalente a cualquier movimiento (al alza o a la baja) del subconjunto restante, provocando la cancelación de la pérdida del subconjunto inicial o residual, por el valor de la ganancia de su complemento.

Esta exposición se centrará en la segunda condición de una cartera óptima y esta organizada en tres secciones. En la primera (Revisión literaria) se presentan las propiedades de un concepto que teóricamente ha servido a este fin, conocido como curvas de indiferencia; en la segunda, una propuesta sobre las condiciones en las que deberá operar en este contexto, extendiendo las cualidades descritas en la primera sección, y finalmente las limitaciones y conclusiones sobre los componentes de la función que administra los cambios entre la variable riesgo y rendimiento, que mantienen constante la utilidad que provee un portafolio.

REVISIÓN LITERARIA

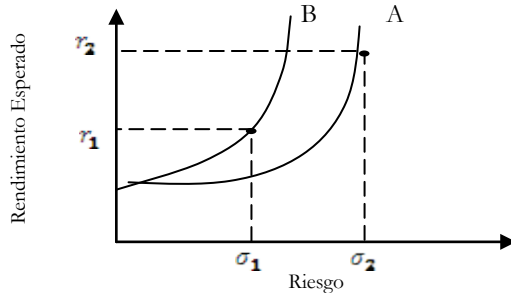
Al superponer la primera y la segunda condición de un portafolio óptimo surge una pregunta ¿Cuál disposición de las que integran el conjunto eficiente de combinaciones resulta ser la más apropiada? Es cuando se abandona el suelo con el que se identifica aquellos criterios más comunes de entre distintos agentes, para adentrarse en los intereses particulares de un inversionista. Este problema ha sido atendido desde un concepto de microeconomía conocido con el nombre de curvas de indiferencia. Expuesto originalmente por Vilfredo Pareto en 1906 se definen como segmentos que agrupan puntos en el espacio de bienes entre los que el consumidor se siente indiferente (Gould J. *et al* 1994, 68), producto de una adecuada sustitución del defecto o el descenso de las unidades disponibles de un bien por el incremento de las unidades disponibles de otro (Pareto V. 1906, 205). Esta relación de sustitución que es planteada en términos de dos bienes, es adaptada al par riesgo-rendimiento buscando caracterizar el grado de aversión de un agente por medio su deseo de negociar con la relación riesgo-rendimiento (Bodie Z. *et al* 2006), es decir, con que rendimientos el agente llega a permitir un valor de la variable riesgo y ante que combinaciones el agente no manifiesta alguna preferencia (Figura 1). En una primera instancia puede ser simplificada a este punto las propiedades de la curva de indiferencia, pero como se demostrara más adelante esta representación implica una visión más compleja de las preferencias de los agentes.

Por ejemplo, un agente que tolera riesgos muy altos, como es el caso del agente A de la figura 1, exigirá una retribución más baja para cada nivel de exposición al riesgo de la que llegará a exigir alguien con un nivel de aversión más alto, como es el caso del agente B. Así, de proponerle al agente B un portafolio con una retribución menor a r_1 para una exposición al riesgo valuada en σ_1 , el seguramente la descartará. Y esta negativa estará sujeta a que tan elevada sea la rentabilidad exigida sobre la rentabilidad que un portafolio este en capacidad de ofrecer. Por lo tanto, el grado de aversión dependerá de cuan pronto se descarte un nivel de exposición al riesgo por exigir un rendimiento demasiado elevado, lo que gráficamente se manifiesta por un ascenso más veloz de la curva de indiferencia.

En adición, la negativa de un agente por aceptar un portafolio con un rendimiento menor al exigido es una respuesta que varía, como varía su reacción al tener una retribución mayor. Sin llegar a precisar cuan mayor será su satisfacción, se puede afirmar que será superior a la que le causara en el caso de recibir el rendimiento que exige. Ahora, que cuando se asume una escala a lo largo de la que ubicar un grado específico de satisfacción, se podría cuantificar esa diferencia, que así como es positiva en este caso

también puede ser negativa en otro en el que sea compensado por un rendimiento menor al exigido. Dependiendo de que tanto difiera el rendimiento requerido del que pueda obtener, mayor será la insatisfacción del agente.

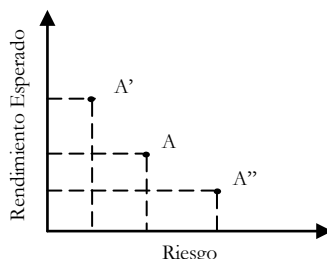
Figura 1: Curvas de Indiferencia para los Agentes A y B



Las líneas A y B representan las curvas de indiferencia de dos agentes que difieren en su capacidad de tolerar el riesgo. La línea etiquetada con la letra B representa las combinaciones asociada a un agente más averso al riesgo, ya que demandará una compensación mayor por unidad adicional de riesgo.

Por otro lado, en medio de los cambios en el nivel de satisfacción se encuentra una actitud de indiferencia, la respuesta a retribuciones mayores o menores pero que también gozan de un ajuste conveniente del nivel de exposición al riesgo. Estos casos en los que distintas combinaciones riesgo-rendimiento proveen igual satisfacción son los que dan forma a la curva de indiferencia, donde cada par riesgo-rendimiento, podrá corresponder a uno, y solo uno de los conjuntos asociados a cada nivel de la escala de satisfacción. Luego, son en realidad una familia de curvas las que caracterizan las preferencias del agente (Latane *et al* 1967, 359-373), y cada una se diferencia por la utilidad o la satisfacción que le provee. A lo largo de una, la utilidad es constante y es cuando se pasa de una a otra cuando la utilidad varía, pero ¿Cuál es la dinámica de esta uniformidad en satisfacción cuando se pasa de una curva a otra? De la inspección de los supuestos originales se obtiene la respuesta. Cuando simultáneamente se mejora la retribución y se reduce el riesgo (paso de A a A'), la satisfacción del agente se mejora (Figura 2), pero de ocurrir lo opuesto, si el rendimiento es más bajo y el riesgo más alto (paso de A a A'') la satisfacción de agente desmejora. Para el desplazamiento de la curva de indiferencia se obtendría así que la utilidad tendrá una relación directa o positiva, entre su valor y la proximidad de la curva a los rendimientos altos y a los niveles de exposición más bajos.

Figura 2. Utilidad



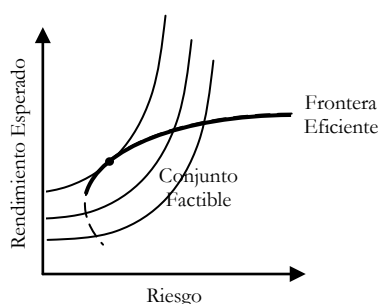
Los tres puntos en el plano representan las combinaciones en riesgo y rendimiento de tres portafolios hipotéticos. Los tres puntos integran curvas de indiferencia que difieren en la utilidad que proveen (sus elementos) al agente.

Puede afirmarse entonces, que será óptima una combinación de activos para un agente, si sus características en riesgo y rendimiento se localizan sobre la curva de indiferencia más próxima al noreste del primer cuadrante. Pero la libertad de los desplazamientos de la curva de indiferencia está sujeta a la posibilidad de que una combinación exacta de activos permita aprovechar un punto específico del plano. No a todos los puntos del primer cuadrante del plano le corresponde una combinación de activos de la

cartera. Estos limitan su ubicación al denominado conjunto factible (Figura 3). Así, los desplazamientos de la curva de indiferencia están sujetos a que por lo menos un punto de todos los que la integran, se encuentre dentro del conjunto factible. Lo que limita los esfuerzos de maximizar la utilidad hasta que la línea sea tangente al subconjunto eficiente del conjunto factible de portafolios.

El reto de este artículo consiste en definir las propiedades y las condiciones sobre las que ha de usarse (en este contexto) la curva de indiferencia con fines cardinales. Pese a que elevar su calidad ha sido un esfuerzo no muy bien recompensado y altamente cuestionado, hay que reconocer que tal pago es merecido por sujetar las propuestas a situaciones que demandan rasgos muy complejos de parte de las variables que llegan a afectar las decisiones de un agente.

Figura 3. Máximo de Utilidad



la utilidad alcanza su máximo cuando la combinación de activos en el portafolio provee una relación rendimiento-riesgo inmejorable.

Basta citar el comentario de Pareto, quien al referirse a las preferencias del consumidor, sugiere abandonar el esfuerzo de “considerar la *ophlimate* (utilidad) como una cantidad, en tanto que es una simple hipótesis” (Pareto 1945, 200), pese a que el suponerlo permite definir los caracteres de dicha *ophlimate*. A él se suma Samuelson quien lo advierte en su definición de la utilidad (Samuelson *et al* 2001, 150) y Hicks con sus demostraciones (Hicks 1956, 23).

Pero contrario a los propósitos ordinales del concepto, en este artículo se sostendrá que la utilidad si podrá ser cuantificada, no ordinariamente y no sobre la totalidad del bien, sino sobre una determinada propiedad de dicho bien. Es decir, que se valorara no de manera directa sino a través del análisis de determinadas prevenciones e intereses del agente.

METODOLOGÍA

¿Cómo eludir o reducir esta necesaria idealización? ¿Cómo lograr que las variables en los modelos adopten dinámicas reales y que producto de su interacción se obtengan conclusiones razonables de acuerdo a los fenómenos observados? Por otro lado, no es posible cuestionar la incapacidad de conocer un fenómeno concreto en todos sus detalles. Lo que descarta todo intento por comprender la variedad de eventos o circunstancias que influyen en el juicio de un agente a la hora de rechazar o aceptar un valor específico de las variables de decisión señaladas. Sin embargo, hay un punto medio que consigue satisfacer razonablemente ambas condiciones. Por un lado, se consideran los aspectos determinantes de los eventos y circunstancias que se traducen en una decisión, y por el otro, no se compromete una inspección de cada uno de dichos eventos y circunstancias. Este punto medio es el proceso que traduce todas las influencias externas en decisiones. Ciertamente el término “proceso” abarca una variedad de aspectos, pero es específicamente en el razonamiento en el que se volcara la atención, dejando de lado los detalles orgánicos. Aun más, nuestro interés permite centrar la revisión en una porción menos extensa del proceso o seguramente en rasgos muy concretos de él. Recordemos que en este punto lo importante es

establecer un patrón cuantificable del vínculo que existe entre las variables riesgo y rendimiento, cuando proveen un *valor* igual de satisfacción; patrón que hace parte de otro gran esquema que dicta el ajuste de ese *valor* de satisfacción cuando los pares riesgo-rendimiento no hacen parte del primer grupo descrito. Lo que nos conduce a identificar el modo en que se opera sobre un “sistema de medida” (Vargas C. *et al* 2009) del que se asocia una puntuación en satisfacción a una combinación de determinados aspectos en una cartera y otra a un cambio no compensado entre las variables. En este sentido, el primer paso es caracterizar el sistema en el que se valorara la satisfacción.

Ya de hecho se ha sugerido algunas de las propiedades del sistema de medida. Cuando se comento el uso de una escala, se reconoce implícitamente un paso gradual entre las calificaciones -aceptable- a -inaceptable-, un flujo regular de una cosa hacia una “no cosa” (Kosko B. 1993, 18), que no encaja con la bivalencia de la lógica booleana sino con la multivalencia, alrededor de la que se construye lo que hoy se conoce por *lógica borrosa*, la cual admite la posibilidad de que existan tres o más opciones, incluso un espectro infinito, y no solo dos extremos, por lo que prima lo análogo y no lo binario (Kosko B. 1993, 32).

Así, liberando el objeto de análisis de aspectos que eventualmente son irrelevantes, se distingue el idioma que manejen en común las variables de decisión. Recordemos que en el espacio de bienes tanto la variable dependiente como la independiente son valoradas en unidades comunes; la cantidad. El idioma que se distinguirá será el homologo de este unidad sobre la que se negocian los intercambios entre las variables, y el cual será llamado *conformidad* (Concepto propio del autor). Cabe precisar que el objeto de la medida de conformidad es el de tener una noción cuantitativa que envuelva el conjunto de posiciones de un agente frente a las variables de decisión aquí tratadas.

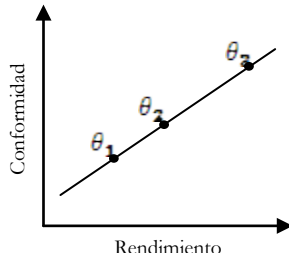
Conformidad (μ)

Refirámonos al rendimiento, e imaginemos una situación en la que se está en capacidad de escoger entre una infinita cantidad de opciones de inversión, que se diferencian únicamente por este factor. Pese a que una tras otra las alternativas puedan ser mejoradas por un rendimiento mayor, la medida de conformidad no crecerá a este mismo ritmo. Para comprenderlo simplifiquemos aún más la situación. Las alternativas son dos: I_1 ofrece una rentabilidad del 2%, mientras que I_2 ofrece el 1%. Naturalmente habrá una inclinación del agente por I_1 , a la que le dará el valor de conformidad más alto de entre las alternativas y a I_2 el más bajo. Cuando surge una tercera opción I_3 con una rentabilidad del 2,6%, el máximo de conformidad se traslada a esta opción, mientras que I_1 tomará uno cercano pero inferior al de I_3 . De esta forma, conforme surjan más opciones, el rango de valores de conformidad se conserva, adoptando cada nueva alternativa un valor entre una posición de completo acuerdo y una de completo desacuerdo. La matemática que trabaja estos conceptos (lógica borrosa) maneja un rango *standard*, asociando al máximo del que aquí se llamo valor de conformidad el valor de uno, y al más bajo el de cero.

Una vez definido el rango se caracterizara su comportamiento dentro de estos límites. Para ello, hay que tomar el lugar del agente A, quien tiene a su disposición varias alternativas de inversión que difieren tan solo por el rendimiento ofrecido. Estas sean θ_1 , θ_2 y θ_3 . Para al agente A existirá una relación directa (sin llegar a precisar las proporciones) entre su interés por una alternativa y la rentabilidad que ofrece. Por lo tanto, entre más alto sea el rendimiento mayor será su favor o beneplácito por la alternativa (Figura 4.). En este caso como en muchos otros, la pérdida de generalidad es más aparente que real. El perfil de la figura 4 es un ejemplo a través del cual se busca resaltar el modo en que llegan a ser percibidas varias alternativas de inversión que difieren en la rentabilidad que ofrecen. Este perfil seguramente será ligeramente distinto para otro tipo de agente, que en caso de mantener un *agrado* marginal equivalente,

podrá ajustársele una recta con una pendiente más cercana a cero o a infinito, o en el caso de un agrado marginal distinto para cada rendimiento, una curva sobre la que cualquier recta tangente deba tener una pendiente necesariamente mayor a cero.

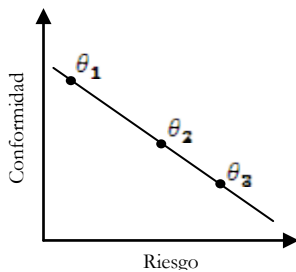
Figura 4. Conformidad Cobre el Rendimiento



Para un agente racional la conformidad mantiene una relación directa con el rendimiento. Ya que, siendo su objetivo maximizar la utilidad, este será cumplido en la medida que el agente obtenga una mejor compensación.

Manteniendo estas precisiones respecto al perfil de la figura 4, considere una situación en la que el agente se enfrenta a alternativas distintas ya que el aspecto variante es el riesgo. En este caso, su conformidad tendrá una relación inversa al riesgo. El agente estará cada vez menos dispuesto a aceptar una alternativa de inversión si ella implica una exposición más alta (Figura 5.).

Figura 5. Conformidad Sobre el Riesgo



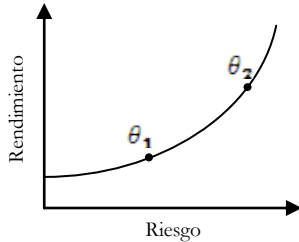
Contrario el perfil de la relación rendimiento-conformidad, la relación entre el riesgo y la conformidad es inversa, luego un incremento de la exposición al riesgo causa un descenso en la utilidad.

A lo largo de la curva de indiferencia las medidas en conformidad adoptan un patrón muy particular. Dado que las preferencias del agente se han representado a través de la curva de la figura 6, nótese qué ocurre cuando hay un movimiento a lo largo de ella desde un punto θ_1 a θ_2 . Al hacerlo hay un incremento del riesgo implicado, provocando que las unidades de conformidad sobre este atributo se reduzcan. Sin embargo, al tiempo que aumenta la rentabilidad las unidades de conformidad respecto a ella aumentan. El descenso de uno es compensado por un aumento de su contraparte, lo que nos da una idea muy cercana de la relación de indiferencia entre dos bienes descrita por Pareto (Lo mismo ocurre cuando el movimiento es desde el punto θ_2 a θ_1 , en este caso cuando las unidades de conformidad sobre el riesgo aumentan, las unidades de conformidad sobre la rentabilidad se reducen). Y es a la luz de esta “no distinción” que se afirma que hay un cambio de las unidades de conformidad sobre el riesgo por las unidades de conformidad sobre la rentabilidad.

Pero no necesariamente las unidades de conformidad originales son linealmente equivalentes a las de destino para cualquier desplazamiento a lo largo de la curva, lo que exige un ajuste de los perfiles de las figuras 4 y 5. Y es específicamente, el de la figura 4 el que se adaptara; el motivo, es la armonía de lo que por un lado es su crecimiento aparentemente ilimitado o ausencia de una cota superior en su rango, con el crecimiento marginal que acompaña sus aumentos a lo largo de la curva de indiferencia, contrario al perfil

de la figura 5 en la que resulta más complejo adaptar los ascensos marginales conforme su valor es más alto, al “no cierre” de su dominio. Luego, al combinar los desarrollos marginales de la curva de indiferencia, con el perfil de la figura 4 y las restricciones al *valor* de conformidad, se tienen las pautas necesarias para construir la función que de aquí en adelante denominaremos calificador de conformidad sobre el rendimiento.

Figura 6. Valor de Conformidad a lo Largo de la Curva de Indiferencia



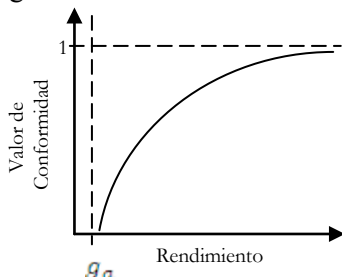
Los desplazamientos a lo largo de la curva de indiferencia generan intercambios en los valores de conformidad que dependiendo de la dirección en la que se oriente la translación, el papel de “origen” o “destino”, cambia de una a otra de las variables de las que se valora la conformidad.

Calificador de Conformidad Sobre el Rendimiento

Al pensar en términos de conformidad las asimetrías marginales entre las variables relacionadas por la curva de indiferencia (en este contexto) toman una única forma. Desde la perspectiva del rendimiento, en el extremo superior de su rango de valores, la balanza que está en equilibrio cuando las razones de cambio de las variables riesgo-rendimiento es igual, se inclina de su lado. Motivo por el cual, cada unidad de rendimiento adicional es correspondida por una fracción cada vez más pequeña de una unidad de riesgo. Lo que se traduce en una porción cada vez más pequeña de una unidad de conformidad sobre el riesgo por unidad adicional de rendimiento. Toda vez que la carga marginal de la curva de indiferencia recae en la función de pertenencia del rendimiento, le corresponde a esta adaptarse plenamente con otro descenso marginal que haga equivalente el tamaño de la fracción de unidad de conformidad sobre el riesgo con el tamaño de la unidad de conformidad sobre la rentabilidad, lo que se asemejara a la aproximación a una asíntota horizontal.

Dado que ocurre lo opuesto cuando se alcanzan aquellas rentabilidades imagen de un nivel de riesgo cercano a cero, se deduce que en el extremo inferior de la función de pertenencia deberá haber un aumento marginal con un patrón semejante pero opuesto al del extremo superior. Luego el perfil de la figura 4 se convierte en el de la figura 7, el cual coincide con la solución dada por Daniell Bernoulli a la paradoja de San Petersburgo. Este es un resultado muy importante, debido a que podemos validar un comentario previo en el que se afirmó que nuestro elemento transitorio (conformidad) es en realidad una noción parcial de la utilidad, que al combinarse con los valores en conformidad sobre los otros atributos resulta en la utilidad total servida por un bien o un conjunto de bienes.

Figura 7. Función de Pertenencia de la Variable Rendimiento



La función de pertenencia del rendimiento será cóncava hacia el eje de la variable independiente, lo que coincide con las conclusiones de Bernoulli sobre el decrecimiento marginal de la utilidad ante un aumento de la riqueza.

Con fines prácticos, esta curva puede ser aproximada con una función racional (cociente entre dos polinomios donde el operando del denominador es no nulo), la cual estará definida para todos los reales distintos de g_a y cuya imagen será cero para todo rendimiento inferior a g_i :

$$\mu_r(r_p) = \begin{cases} r_p < g_i & 0 \\ r_p \geq g_i & \left[\frac{r_p - g_i}{r_p} \right]^2 \end{cases} \quad (1)$$

Donde,

$$g_i = r_m \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad (2)$$

$\mu_r(r_p)$: Valor de conformidad sobre el rendimiento.

r_p : Rendimiento del portafolio.

r_m : Rendimiento medio. Un rendimiento que originalmente es calificado con 0,5 (valor medio de conformidad) con el cual se fija una referencia a partir de la que determinadas rentabilidades califican como aceptables o inaceptables.

g_i : Es el rendimiento más alto bajo el cual los rendimientos inferiores serán calificados con una conformidad de cero.

Calificador de Conformidad Sobre el Riesgo

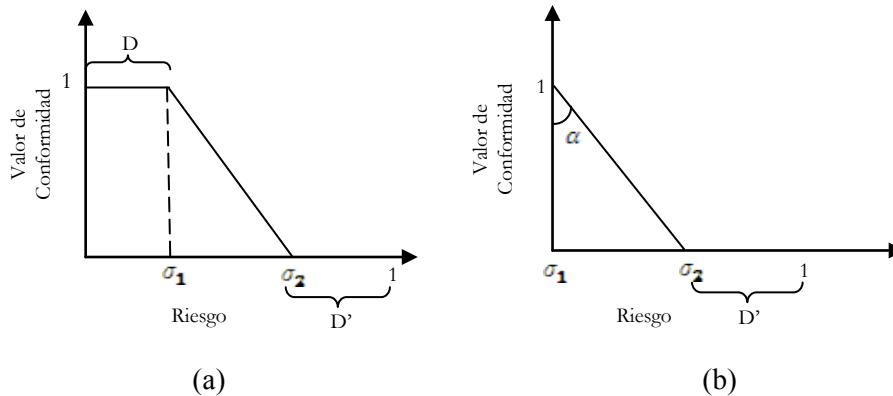
Para nuestro agente hipotético, el que una cartera le ofrezca una exposición que él considera baja, será motivo de una reacción positiva de parte de él. Conforme más bajo sea el riesgo, el agrado del agente será mayor. Claro está, que dependiendo de su nivel de aversión la función que establece dichos niveles de conformidad (Figura 5) se deformara adaptándose a los intereses y prevenciones del agente.

Dado que debe comportar de forma lineal y que su pendiente debe ser menor o igual a cero, puede sugerirse dos soluciones, que brindan al mismo tiempo la posibilidad de precisar los detalles del rango de conformidad sobre este atributo.

La figura 8.a. sugiere un perfil en el que las calificaciones de conformidad son divididas en tres grupos. En el primero $(0, \sigma_1]$ se da la máxima puntuación a todo nivel de exposición inferior a σ_1 . En el segundo $(\sigma_1, \sigma_2]$ la calificación en conformidad decrece a un ritmo de $-1/(\sigma_2 - \sigma_1)$, luego por cada unidad porcentual adicional de exposición al riesgo, la satisfacción asociada será $1/(\sigma_2 - \sigma_1)$ menor. En el tercer tramo (σ_2, ∞) , se reconoce la calificación de conformidad mas baja a cualquier exposición al riesgo superior o igual a σ_2 .

Por otro lado, en la figura 8.b. el perfil se divide en solo dos tramos con $\sigma_1=0$, con un decrecimiento del calificador en conformidad de $-1/\sigma_2$ en la primera sección y una calificación de cero para todo riesgo superior a σ_2 .

Figura 8. Funciones de Pertenececia de la Variable Riesgo



El perfil del calificador de conformidad sobre el riesgo puede adoptar una de dos formas que se diferencian por el uso de uno o dos tramos a lo largo de los cuales la puntuación en conformidad es igual.

Pero el perfil de la figura 8.a presenta una dificultad. Bajo el supuesto de aversión de nuestro agente hipotético, habrá una distinción en conformidad entre una exposición al riesgo de cero, y otra mayor a cero. En otras palabras no hay forma de sugerir en el agente una actitud de indiferencia entre una alternativa libre de riesgo y otra que implique la exposición de su inversión, a menos de que sea tan insignificante como para que el agente pueda considerarla nula, lo que nos conduce a eliminar el primer tramo del perfil y adoptar el perfil de la figura 8.2. como el indicado. En él, un nivel específico de aversión es acogido con diferentes ángulos α , manteniendo la más alta puntuación en conformidad para un nivel de riesgo de 0. Este ángulo tendrá una relación inversa con el grado de aversión al riesgo del agente; conforme el agente sea más averso al riesgo, el ángulo será más pequeño, de forma que el conjunto D' de niveles de exposición inaceptables sea más grande.

La función descrita es:

$$\mu_{\sigma}(\sigma_p) = \begin{cases} \sigma_p < 2\sigma_m & 1 - \frac{\sigma_p}{2\sigma_m} \\ \sigma_p \geq 2\sigma_m & 0 \end{cases} \quad (3)$$

Donde,

$\mu_{\sigma}(\sigma_p)$: Valor de conformidad sobre la variable riesgo.

σ_p : Riesgo de la cartera

σ_m : Riesgo medio, el cual fija una referencia a partir de la que determinados riesgos califican como aceptables o inaceptables.

Función de Integración

Este será específicamente el puente que cruzaran los valores de conformidad sobre el riesgo para tomar la forma de valores de conformidad sobre la rentabilidad, y viceversa, cuando una combinación de

determinados activos en determinadas proporciones sugiera un movimiento a lo largo de la curva de indiferencia. Ya que se han adaptado las funciones de pertenencia para hacer equivalentes las unidades originales del traslado con las del destino, este componente no debe plantear relaciones distintas a las lineales, por lo tanto su expresión será muy semejante a la utilizada para ilustrar la sustitución perfecta entre dos bienes que mantienen un RMS (Tasa Marginal de Sustitución) constante. Siendo,

$$U(r_p, \sigma_p) = \omega_r \mu_r(r_p) + \omega_\sigma \mu_\sigma(\sigma_p) \quad (4)$$

Donde,

$U(r_p, \sigma_p)$: Utilidad total obtenida por la combinación de un rendimiento r_p y una exposición al riesgo de σ_p .

ω_r y ω_σ son constantes que le dan a los valores de conformidad una connotación de partes. Su valor fluctuara entre uno y cero, y en calidad de ponderadores su adición será igual a uno. Así,

$$U(r_p, \sigma_p) = \omega_r \mu_r(r_p) + (1 - \omega_r) \mu_\sigma(\sigma_p) \quad (5)$$

Aquí la integridad del todo estará garantizada por la coordinación de las partes. Cuando hay un descenso del valor de conformidad sobre el riesgo o el de conformidad sobre el rendimiento, su contraparte deberá ascender con el fin de mantener un $U(r_p, \sigma_p)$ constante, que equivale a un movimiento a lo largo de la curva de indiferencia. Pero si la magnitud de cambio de uno no es equivalente a la del otro, la utilidad resultante varia. Esto genera un desplazamiento de la curva de indiferencia, que será favorable si esta orientado al noreste de la posición original de la curva, en otras palabras, cuando una reducción de la exposición al riesgo sea acompañada con un incremento simultáneo del rendimiento. Así, solo un intercambio neto positivo consigue mejorar la utilidad. Al invertir estos efectos se obtiene el termino que unifica cada uno de los objetivos parciales, permitiendo afirmar que la única meta será la optimización del termino utilidad $U(r_p, \sigma_p)$.

Función de Indiferencia

Junto con los valores medios usados en la construcción de las funciones de pertenencia del riesgo (σ_m) y la rentabilidad (r_m), ω_r y ω_σ sirven también a la adaptación de los intercambios a un nivel específico de aversión.

Los ponderadores facultan a la función de integración para modificar convenientemente el ajuste que se realizó del comportamiento marginal de la función de pertenencia del rendimiento al de la curva de indiferencia, alterando de forma equivalente cualquier intercambio de valores de conformidad para un desplazamiento desde y hasta cualquier punto de la curva de indiferencia. Para verificarlo, es necesario plantear el rendimiento, en términos del riesgo efectuando el recorrido de las unidades de conformidad (Esto se consigue sustituyendo los calificadores de conformidad, tanto del riesgo como del rendimiento, en la función de integración, de la que luego se despeja la variable r_p), obteniendo:

$$r_p = g_i \left[1 - \frac{\left[U(r_p, \sigma_p) - \left[(1 - \omega_r) \left(1 - \frac{\sigma_p}{2\sigma_m} \right) \right] \right]^{1/2}}{\omega_r} \right]^{-1} \quad (6)$$

Su estructura está dispuesta para comprender los efectos de modificar la distribución de los ponderadores, pero manteniendo presente durante la inspección, el papel de metas u objetivos que ambas cumplen.

Cuando un agente decide que en la labor de optimización se le da más importancia a una de las metas, debe ser consciente que el costo es una desmejora de la contraparte. Por ejemplo si el valor de ω_r es superior a 0,5, el modelo concentrara los esfuerzos en satisfacer la necesidad de rentabilidad sobre la de una baja exposición al riesgo, permitiendo la exploración de altos niveles de exposición de riesgo, tras la búsqueda de una mejor compensación. Si la situación es distinta, y es en el ponderador de la meta de riesgo en donde se concentra el mayor aporte a $U(r_p, \sigma_p)$, entonces cerrara el grupo de riesgos admisibles, acelerando el ascenso de la curva de indiferencia, y como consecuencia, obteniendo una menor retribución por la escasa importancia de esta meta.

El objetivo es pues determinar la cartera que maximice la utilidad ($U(r_p, \sigma_p)$) que le reporta a un agente una determinada combinación de activos y que a la vez optimice la relación rendimiento-exposición al riesgo. Pero la segunda condición será satisfecha si y solo si el valor de la variable $U(r_p, \sigma_p)$ alcanza su nivel óptimo, por lo tanto se reafirma la singularidad del objetivo del modelo, el cual será optimizar la variable que agrega los valores ponderados de pertenencia,

$$\text{Max } U(r_p, \sigma_p) \quad (7)$$

Siendo,

$$U(r_p, \sigma_p) = \omega_r \mu_r(r_p) + \omega_\sigma \mu_\sigma(\sigma_p) \quad (8)$$

Para,

$$\mu_r(r_p) = \begin{cases} r_p < g_i & 0 \\ r_p \geq g_i & \left[\frac{r_p - g_i}{r_p} \right]^2 \end{cases} \quad (9)$$

$$\mu_\sigma(\sigma_p) = \begin{cases} \sigma_p < 2\sigma_m & 1 - \frac{\sigma_p}{2\sigma_m} \\ \sigma_p \geq 2\sigma_m & 0 \end{cases} \quad (10)$$

Con,

$$g_i = r_m \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad (11)$$

El siguiente paso será conocer la dinámica de los elementos ensamblados alrededor de las precisiones realizadas por cada agente y canalizadas por medio de las variables dispuestas para tal fin (σ_m , r_m , ω_r , ω_σ). Se recurre a los precios de cierre registrados por 19 acciones que cotizan en la bolsa de valores de Colombia, las cuales presentan entre media y alta bursatilidad según el criterio de la bolsa.

La bursatilidad representa el potencial de liquidez de una acción teniendo en cuenta la frecuencia y el volumen de transacción, y será el único aspecto a considerar para hacer uso de estas 19 acciones, desconociendo algunas otras propiedades de la acción y el emisor; el motivo es el hecho de que las acciones con este nivel de bursatilidad garantizan que el número de registros idénticos sea mínimo o nulo, permitiendo el uso de la medida de correlación por rangos. Los datos corresponden a los rendimientos semanales del período comprendido entre el 9 de abril de 2007 y el 28 de marzo del 2008, lo que suma un total de 48 registros por acción.

Hay que advertir que sin desestimar la importancia del uso de mecanismos apropiados para medir el riesgo y para calcular el rendimiento estimado, estos se obtendrán a partir del coeficiente de correlación por rangos de Spearman (Spearman 1904, 72) y del promedio de los rendimientos históricos, respectivamente. Finalmente, se definen las variables de entrada del modelo (σ_m , r_m , ω_r , ω_σ), a partir de las cuales se recrearan siete escenarios asociados a siete agentes hipotéticos distintos.

En la tabla 1 se presentan los resultados para los escenarios A – G, los cuales se plantearon a partir de cambios (cada variante corresponde a las preferencias de un agente hipotético) en las variables: riesgo medio, rendimiento medio, el ponderador “meta rendimiento” y el ponderador “meta riesgo”. Así mismo, en la tabla 2 se presenta la participación sugerida de cada uno de los 19 activos en la cartera. En el escenario “B”, se sugieren valores para los parámetros asociados a un agente con intereses “medios” o “moderados” (Figura 9), a partir del que se realizaron ajustes para obtener los agentes “C”, “F” y “D”, quienes muestran perfiles conservadores, y de los agentes “A” y “E” quienes muestran perfiles agresivos.

Respecto al riesgo y rendimiento medio del portafolio, puede afirmarse que se derivan de las condiciones del mercado y de las demandas del agente. Una determinada combinación de las variables de decisión, guiara los desplazamientos de la curva de indiferencia hacia la combinación que le provea el rendimiento más alto para un nivel específico de riesgo, al tiempo que se maximiza su utilidad (evento en el cual la curva de indiferencia es tangente a la frontera eficiente).

En un intento de definir una referencia, es posible comentar que al contrastar los efectos de un factor omega mayor para la meta rendimiento (80%) que para la de riesgo, es evidente que el resultado es la búsqueda de carteras eficientes que ofrezcan una mayor rentabilidad. Sin embargo, a raíz de la necesidad de una mejor compensación, de forma inherente se nota que existe un alto grado de exposición (76,13%), tal y como se muestra en el escenario A. Adicionalmente, los valores de pertenencia hacen evidente también, que en este caso el agente es bastante condescendiente a la hora de definir una referencia para calificar la conformidad del riesgo. Un 40%, significara una subordinación del costo de conformidad sobre el riesgo que le permitirá al modelo llegar al punto de sugerir una cartera con un nivel de exposición tan alto.

Tabla 1. Características de la Cartera

Escenarios		A	B	C	D	E	F	G
Características de la Cartera	Riesgo (σ_p)	76.13%	36.14%	31.39%	29.86%	42.62%	31.46%	37.39%
	Rendimiento (r_p)	1.38%	0.89%	0.74%	0.65%	1.03%	0.74%	0.92%
	Pertenencia Riesgo (μ_σ)	0.524	0.548	0.608	0.000	0.696	0.607	0.533
	Pertenencia Rendimiento (μ_r)	0.622	0.450	0.363	0.305	0.510	0.776	0.210
Variables de Decisión	Riesgo Medio (σ_m)	40.00%	40.00%	40.00%	10.00%	70.00%	40.00%	40.00%
	Rendimiento Medio (r_m)	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	0.30%	1.70%
	Ponderador Meta Rendimiento (ω_r)	80.00%	50.00%	30.00%	50.00%	50.00%	50.00%	50.00%
	Ponderador Meta Riesgo (ω_σ)	20.00%	50.00%	70.00%	50.00%	50.00%	50.00%	50.00%
Objetivo	Utilidad ($U(r_p, \sigma_p)$)	0.602	0.499	0.534	0.152	0.603	0.692	0.371

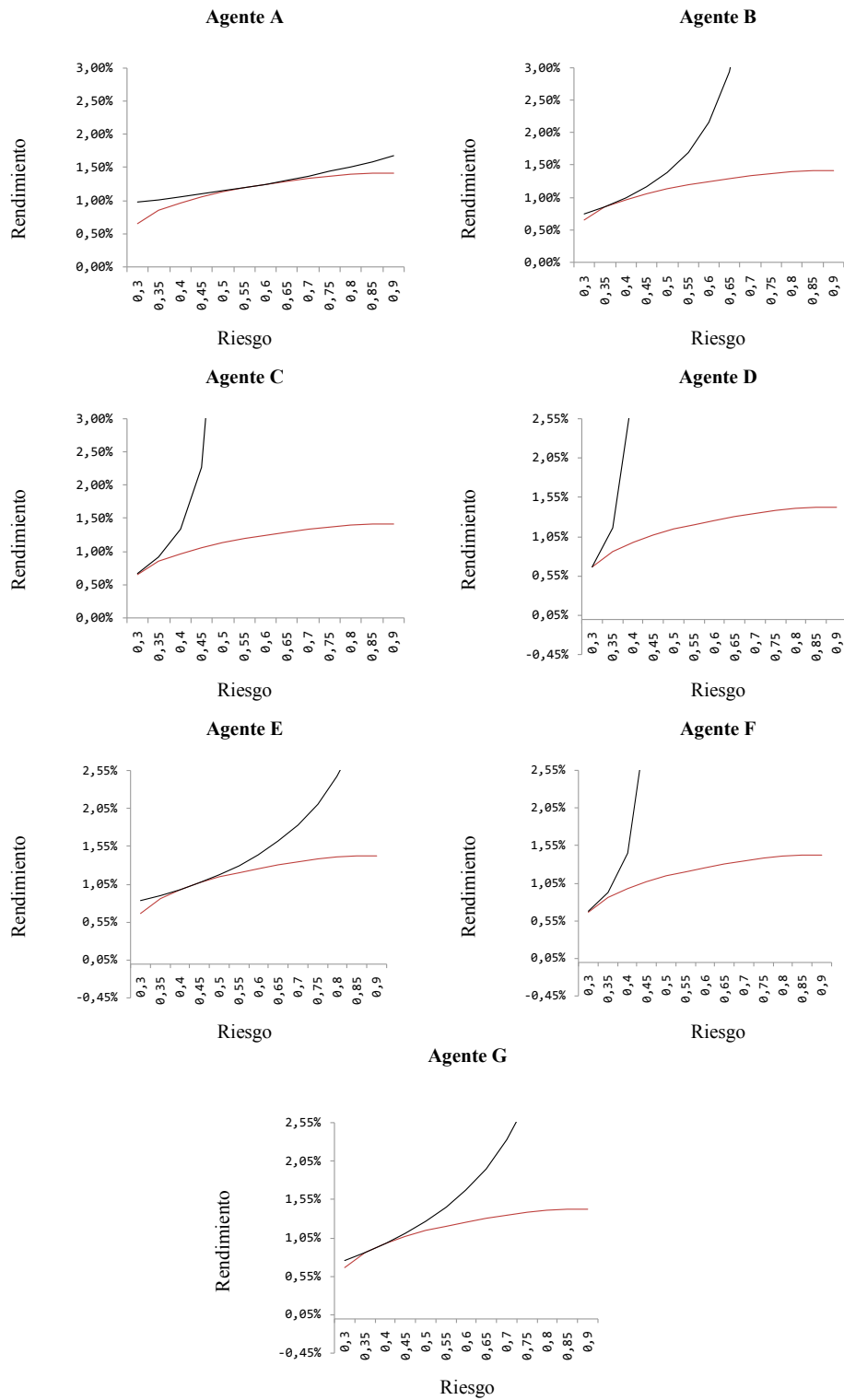
La sección "Características de la Cartera" junto con la sección "Objetivo" exponen el resultado del proceso de optimización realizado sobre los parámetros del bloque "Variables de decisión" con los que se pretende caracterizar las preferencias de inversión de siete agentes distintos.

Tabla 2. Portafolios

Escenarios		A	B	C	D	E	F	G
Participación Sugerida	Acerías Paz del Río	35.13%	15.32%	6.51%	2.88%	23.31%	6.67%	17.06%
	Banco de Bogotá	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	Banco de Occidente	0.00%	5.53%	9.36%	10.18%	1.70%	9.29%	4.78%
	Banco Santander	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	Bancolombia	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	Coltejer	43.51%	24.18%	17.63%	14.80%	30.28%	17.77%	25.48%
	Compañía Colombiana de Inversiones	3.37%	10.15%	8.33%	7.17%	11.39%	8.37%	10.52%
	Corficolombiana	0.00%	3.30%	6.00%	6.46%	0.75%	5.94%	2.79%
	Fabricato	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	Grupo Aval	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	Grupo Nacional de Chocolates	0.00%	2.87%	7.28%	9.60%	0.00%	7.19%	2.00%
	Interbolsa	0.00%	0.00%	0.00%	2.98%	0.00%	0.00%	0.00%
	Interconexión Eléctrica S.A.	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	Mineros S.A.	0.00%	3.40%	4.60%	5.39%	2.13%	4.57%	3.15%
	Odinsa	17.99%	26.95%	28.32%	27.08%	25.61%	28.30%	26.67%
	Promigas	0.00%	8.30%	11.97%	13.46%	4.84%	11.90%	7.56%
	Suramericana de Inversiones	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	Tablemac	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	Inversiones Argos S.A.	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

Participación sugerida, de cada uno de los 19 activos del grupo original en el portafolio de los agentes caracterizados a través de los parámetros de la tabla 1.

Figura 9. Cartera Optima para Agentes A a G.



La curva de indiferencia intercepta la frontera eficiente en el punto que convenga a los intereses y prevenciones del agente.

Por otro lado, cuando al factor omega de la meta de riesgo se le asigna la mayor importancia en términos del aporte a la variable $U(r_p, \sigma_p)$, el efecto es un rendimiento más bajo respecto al escenario en el que se le asigna una misma importancia a la metas riesgo-rentabilidad (B), procurando de esa manera buscar bajos niveles de exposición al riesgo (31,39%). Aunque serán bajos en términos del valor medio de referencia (40%), no para el agente caracterizado en el escenario D quien fija un valor medio del 10% y un 31,39% no es aceptable. De hecho, en este caso un valor del 29,86% es calificado con un valor de conformidad de 0.

Del escenario D, hay que destacar su cuidado por exigir un menor valor de exposición al riesgo, haciendo evidente un alto nivel de aversión al riesgo. Dada las características de los activos en estudio, esto le significa, junto a un nivel de pertenencia muy bajo del riesgo, una rentabilidad baja, producto de la restricción sobre el riesgo.

En los casos E, F y G los parámetros modificados fueron el rendimiento y riesgo medio. Un agente considerado como agresivo puede ser reconocido por parámetros similares a los señalados en el escenario E, en el que pese a que asigna el mismo ponderador para las metas riesgo-rendimiento, es evidente su alta tolerancia al riesgo, ya que define una referencia muy alta (70%), bajo la que valores cercanos pueden tener un alto valor de conformidad.

El caso F, sobresale por el valor de pertenencia del rendimiento. El agente dispuso una referencia muy baja respecto a lo que los activos están en capacidad de ofrecer, lo que permite que la meta fuera superada significativamente (0,7764). Contrario a lo que ocurre con el escenario G, en el que se exigió un rendimiento del 1,7%, y el cual se alcanzó parcialmente con un rendimiento del 0,92%, calificado con un 0,2103 de pertenencia.

CONCLUSIONES

La descripción de la curva de indiferencia como una consecuencia del tránsito de valores de conformidad a lo largo de una función de tipo lineal, denominada “de integración”, permitió acertar en la combinación de activos que cumplen con las condiciones de una cartera óptima. En adición, la imagen permitió definir las condiciones en las que el desplazamiento de un calificador a otro y un cambio no compensado, mantienen, favorecen o perjudican a la utilidad neta. Sin embargo, es necesario reconocer o (en el mejor de los casos para esta exposición) validar la suficiencia de las variables destinadas a canalizar los intereses y prevenciones del agente. Aunque el riesgo y rendimiento medio, así como los ponderadores de las metas rendimiento y riesgo, permitieron centrar la búsqueda de un portafolio óptimo, es posible que deban ser definidos otros parámetros de manera que se abarque la mayor superficie del área a lo largo de la cual se extiende demandas del agente.

Hay que advertir, que la incorporación de parámetros adicionales puede involucrar una reorganización de roles, de modo que la carga marginal de la curva de indiferencia, que originalmente se concentro en el calificador de conformidad sobre el rendimiento, pueda ser condicionado *a priori* por la función de integración e incluso del calificador de conformidad sobre el riesgo.

REFERENCIAS

Bernoulli D.. *Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk*. Econometrica. 22 de Enero. 1954. P. 23-36

Copeland T. E. & Weston J. F. (1986). *Managerial Finance*. Chicago. Dryden Press

Gordon J. A., Sharpe W. F. & Bailey J. V. (1995) *Investments: Instructors Manual with Transparency Masters* (5th Edition). Prentice Hall.

Gould J. P. & Lazear E. P. (1989) *Microeconomic Theory* (6th Edition). Boston. Irwin

Hicks J. R. (1939) *Value and Capital*. Oxford, Oxfordshire. Clarendon Press

Hicks J. R. (1956) *A revision of demand theory*. Oxford. Clarendon Press

Hugh G. & Ross R. (1984) *Microeconomía*. Madrid. Alianza.

Kosko Bart. (1993) *Fuzzy Thinking. The New Science of Fuzzy Logic*. New York. Hyperion.

Markowitz H. (1952) *Portfolio Selection*. Journal of Finance. 1952. Vol VII. No. 1.

Merton R. C. & Bodie Z. (2000) *Finance*. Harvard University. Prentice Hall.

Nicholson W. (1995) *Microeconomic Theory* (6th Edition). New York. Dryden Press.

Pareto V. (1909) *Manuel D'Economie Politique*. Paris. V. Giard & E. Brière. Traducción al Español. Guillermo Cabenallas. *Manual de Economía Política* (1945). Buenos Aires. Atalaya.

Pratt J. W. (1964) *Risk Aversion in the Small and in the Large*. Econometrica. Enero/Abril. P. 122-136.

Samuelson P. A. & Nordhaus W. D. (2004) *Economics*. Irwin/mcgraw-hill

Sharpe W. F. (1976) *Portfolio Theory and Capital Markets*. New York. McGraw-Hill

Spearman C. (1904) *The Proof and Measurement of Association between Two Things*. University of Illinois Press. The American Journal of Psychology, Vol. 15, No. 1 P. 72-101

Stiglitz J. E. (1998) *Microeconomía*. Madrid. Ariel Economía.

Vargas C. & Garcia A. (2009) *Criterios Difusos en la Selección de Carteras* (Trabajo de Grado). Bogotá, Colombia: Universidad Piloto de Colombia, Facultad de Ingeniería Financiera

BIOGRAFÍA

Analista Financiero de FINAC S.A. graduado de la facultad de Ingeniería Financiera de la Universidad Piloto de Colombia.