ESTRATEGIA COLLAR COSTO CERO PARA EXPORTADORES CHILENOS. VALUACION DE BLACK-SCHOLES VS SIMULACIONES DE MONTECARLO

Eduardo Sandoval, Universidad de Concepción
Paula Urrutia, Universidad de Concepción

RESUMEN

Las simulaciones de Monte Carlo (SMC) son una importante técnica utilizada en finanzas para valuar opciones europeas en general y estrategias de cobertura de riesgo cambiario en particular. Sin embargo, Hull (2012) indica que esta técnica demanda demasiado tiempo de cómputo para alcanzar un alto nivel de precisión. No obstante lo anterior y como se demuestra en este artículo, los errores estándar asociados a las SMC pueden ser reducidos significativamente al incrementar el número de caminos aleatorios realizados. Adicionalmente, se muestra que la estrategia Collar costo cero seguida por un exportador chileno que busque cobertura mensual frente al riesgo cambiario, converge al mismo precio ya sea usando el modelo de Black-Scholes o SMC cuando aumenta el número de caminos aleatorios. Finalmente, se evalúa la efectividad de la estrategia, mostrando claros beneficios económicos asociados de ser implementada en períodos de apreciación del peso chileno respecto al dólar americano.

PALABRAS CLAVE: Estrategia Collar Costo Cero, Valuación de Black-Scholes, Simulaciones de Monte Carlo

ZERO-COST COLLAR STRATEGY FOR CHILEAN EXPORTERS: BLACK-SCHOLES VALUATION VS MONTE CARLO SIMULATIONS

ABSTRACT

Monte Carlo Simulation (MCS) is an important technique used in finance to value European options in general and hedging strategies of exchange rate risk in particular. However, Hull (2012) indicates that this technique demands much computing time to achieve a high level of precision. In spite of the above, this article shows that the standard errors associated with MCS can be significantly reduced by increasing the number of random walks. Additionally, it is shown that the valuation of zero-cost collar strategy followed by a Chilean exporter, who seeks monthly coverage against foreign exchange risk, converges at the same price either using the Black-Scholes model or MCS when the number of random walks increases through simulations. Finally, the effectiveness of zero-cost collar strategy is evaluated. This strategy shows clear economic benefits associated of being implemented in periods of appreciation of the Chilean peso against the U.S. dollar.

JEL: G13, G17

KEYWORDS: Zero-cost Collar Strategy, Black-Scholes Valuation, Monte Carlo Simulations

INTRODUCCIÓN

Las estadísticas del Banco Central de Chile (www.bcentral.cl) indican que las exportaciones chilenas han aumentado significativamente desde los 21,651 millones de USD en el año 2003 a 78,813 en el año 2012, mostrando así una tasa de crecimiento anual promedio del 15,4%. El fuerte crecimiento de las exportaciones hace necesario que los agentes económicos dedicados a esta actividad en Chile busquen mecanismos de cobertura frente al riesgo cambiario y con ello minimizar las potenciales pérdidas cambiarias en escenarios adversos de tipo de cambio. Uno de estos mecanismos de cobertura es la estrategia Collar, la cual se consigue a través de la combinación de dos opciones europeas sobre el dólar americano. La primera consiste en la compra de una opción de venta con precio de ejercicio K_0 (tipo de cambio $/USD piso) y la segunda en la venta de una opción de compra con precio de ejercicio K_1 (tipo de cambio $/USD techo) ambas posibles de ser ejercidas en una fecha futura determinada.

En este tipo de estrategia, se tiene que el exportador paga y cobra una prima simultáneamente, paga como consecuencia de la compra de la opción de venta a "tipo de cambio piso K_0" y cobra como consecuencia de la venta de la opción de compra a "tipo de cambio techo K_1", por lo que puede darse el caso de que el costo de la combinación de ambas opciones sea cero. Con el objetivo de que el costo sea cero, se buscarán rangos de precio de ejercicio que generen primas de igual cuantía, lo que se conoce como Collar costo cero. Cuando el activo subyacente corresponde a dólares americanos, se tiene que las ventajas asociadas a este tipo de cobertura para un exportador son las siguientes; la cobertura no posee un costo inicial, se fija un tipo de cambio mínimo para realizar la operación, que le permite cubrirse ante la caída del tipo de cambio, es más flexible que un forward de tipo de cambio único y al ser una alternativa OTC (over the counter), el Collar se adecua perfectamente a las necesidades de los clientes en cuanto a montos, plazos, precios de ejercicio, entre otros.

Las desventajas consisten en el techo fijado para el exportador que no le permitirá aprovechar la totalidad de los beneficios que entrega el mercado si el tipo de cambio sobrepasa el tipo de cambio techo K_1. Dada la relevancia que puede tener la cobertura cambiaria en los resultados económicos para un exportador en Chile, este artículo tiene como principal motivación valuar las opciones europeas sobre el dólar americano contempladas en la estrategia Collar costo cero bajo dos métodos alternativos: Simulaciones de Monte Carlo (SMC) y Black-Scholes, y luego probar si existe convergencia en la valuación en ambos métodos en la medida que el número de caminos aleatorios implementados en las SMC aumenta. Finalmente se evalúan los resultados de la estrategia para el caso de un exportador chileno que busque cobertura mensual frente al riesgo cambiario y con ello estimar su efectividad. A continuación el artículo continúa con la revisión de la literatura, luego se sigue con la metodología, luego se presentan los resultados y finalmente las conclusiones.

REVISIÓN LITERARIA

La simulación de Monte Carlo ha sido una de las técnicas más utilizadas en finanzas debido a que evita la complejidad matemática y tiene una implementación relativamente fácil de llevar a cabo. Esta técnica fue inicialmente utilizada en la valuación de opciones por Boyle (1977) y ha sido una herramienta útil en situaciones de valuación de opciones con múltiples factores estocásticos, Barraquand y Martineau (1995). Hull y White (1987) usan SMC para valuar opciones con volatilidades estocásticas. Schwartz y Torous (1989) la aplican en la valuación de activos financieros con garantía hipotecaria. Inspirados por Carriere (1996), y Tsisiklis y Van Roy (1999), Longstaff y Schwartz (2001) usan un método de simulación basado en el algoritmo de mínimos cuadrados de Monte Carlo para valuar opciones americanas. Sin embargo, las SMC han sido también criticadas por algunos autores. Hull (2012) indica que ésta demanda demasiado tiempo de cómputo para alcanzar el nivel de precisión requerido, generando así altas varianzas que lideran a ineficiencias computacionales, lo que no obstante puede ser minimizado gracias a los ordenadores de última generación

METODOLOGÍA

La Eficiencia y Precisión de las Simulaciones de Monte Carlo

Desde un punto de vista estadístico se espera que la eficiencia de las SMC se incremente con el aumento del número de caminos aleatorios usados en las simulaciones. Ya que las SMC son muestras de variables estocásticas, la valuación o precios de las opciones modeladas a través de esta técnica también lo son. El error estándar estimado *(EEE)* puede ser calculado como la desviación estándar *(DS)* de los precios de las opciones estimados a través de las SMC dividido por la raíz cuadrada del número de caminos aleatorios usados en la estimación *(m)*.

$$EEE = DS/\sqrt{m} \tag{1}$$

La ecuación (1) indica que *EEE* disminuirá al incrementar el número de caminos aleatorios usados en la estimación. En teoría si la *DS* permanece constante, al incrementar por ejemplo *m* de 100 a 400, el *EEE* se reduciría en un 50%. Por otra parte, la convergencia en el precio o valuación de opciones es medida a través de la magnitud de las diferencias de los promedios de los precios asociados a las muestras de dos grupos. Para los propósitos de este artículo, SMC y modelo de Black-Scholes, el cual corresponde a un tipo de solución cerrada. Los precios de ambos métodos convergen cuando los promedios no muestran diferencias estadísticamente significativas. Bajo el modelo de Black-Scholes, el dólar americano (tipo de cambio $/USD) sigue un movimiento geométrico del tipo Brownian. Esto es:

$$dS = (r - rf)S\, d_t + \sigma S dz \tag{2}$$

donde S es el tipo de cambio $/USD, *r* es la tasa sin riesgo en Chile, *rf* es la tasa sin riesgo en Estados Unidos, σ es la volatilidad asociada a los rendimientos del dólar americano, y dz es un proceso Wiener,

$$dz = \varepsilon\sqrt{\Delta t}.$$

La estrategia Collar costo cero *(CCC)* corresponde a la combinación de dos opciones europeas. Como fue señalado anteriormente, el exportador chileno que desee cubrirse con esta estrategia debe comprar una opción de venta europea *(P)* con precio de ejercicio K_0 y simultáneamente vender una opción de compra europea *(C)* con precio de ejercicio K_1. Ambas opciones suscritas sobre el dólar americano con igual fecha de vencimiento. Para efectos de valuación, en este artículo se asume que $K_0 = \widehat{S}$ lo cual supone que el exportador no desea obtener un tipo de cambio inferior al observado en el mercado spot inmediato, $\widehat{S}$. El precio de ejercicio K_1 por su parte, toma un valor que, dada la volatilidad en los rendimientos del dólar americano, las tasas de interés y el plazo de vencimiento de las opciones permita generar una estrategia Collar costo cero (esto es el valor de las primas tanto para la opción de venta como para la opción de compra deben ser iguales).

$$CCC = P(\widehat{S}, K_0, t, \sigma, r, rf) - C(\hat{S}, K_1, t, \sigma, r, rf) \tag{3}$$

donde:

$$C = \widehat{S} \cdot e^{-\mathrm{rf} \cdot T} \cdot N(d_1) - K_1 \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(d_2) \tag{4}$$

$$P = \mathrm{K}_0 \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(-d_2) - \widehat{S} \cdot e^{-\mathrm{rf} \cdot T} \cdot N(-d_1) \tag{5}$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{\widehat{S}}{K}\right) + (r - rf + 0{,}5 \cdot \sigma^2) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \tag{6}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T} \tag{7}$$

$\widehat{S}$: Tipo de cambio spot inmediato (\$/US\$)

rf : Tasa de interés libre de riesgo anual externa compuesta continuamente

C : Precio de opción de compra europea

P : Precio de opción de venta europea

K : Precio de ejercicio (K_0 para opción de venta, K_1 para opción de compra)

r : Tasa de interés libre de riesgo anual doméstica compuesta continuamente

σ^2 : Volatilidad (varianza) anual del rendimiento del dólar americano

T : Tiempo de maduración de la opción expresado en años.

N(x) : Función de distribución acumulada de probabilidad asociada a una distribución normal estandarizada.

Volatilidad

La volatilidad corresponde a la incertidumbre sobre los rendimientos proporcionados por el activo subyacente. El efecto de esta variable sobre opciones de compra y venta va en la misma dirección, pues se tiene que a mayor volatilidad, mayor será el precio de la opción. Lo anterior, se explica debido a que a mayor volatilidad más amplio es el rango de precios que puede tomar el activo subyacente al vencimiento, incrementando el riesgo del vendedor de opciones y aumentando la probabilidad de beneficios para los compradores, lo que se traduce en un aumento de la prima. En los modelos de valoración de opciones se asume la hipótesis de mercados eficientes para los activos subyacentes, en otras palabras, que los precios del subyacente incorporan automáticamente toda la información relevante que surge en los mercados. Dado esto, es que la variación de precios será completamente aleatoria, pues la información será entregada al mercado de la misma forma, por lo que la distribución estadística de los precios será una distribución normal.

Prosper Lamothe (1993), señala que diferentes estudios empíricos realizados sobre diversos subyacentes reflejan que aunque las variaciones o rendimientos diarios no se comportan exactamente como una distribución normal, su distribución se aproxima bastante a las características de ésta, por lo que los mercados han asumido la hipótesis sin producirse grandes sesgos.

Volatilidad y Modelos Garch

De acuerdo a Casas y Cepeda (2008) la volatilidad es una característica inherente a las series de tiempo financieras que por lo general, no es constante y por consecuencia todos los modelos de series de tiempo tradicionales que suponen varianza homocedástica, no son adecuados para modelar series financieras. Los modelos autorregresivos de heterocedasticidad condicional (GARCH) se encuentran específicamente diseñados para modelar y pronosticar varianzas condicionales. Engle (1982) señala que la experiencia lleva a contrastar periodos de amplia varianza seguidos de periodos de varianza más pequeña, por lo que un modelo que intente predecir los valores de dicha varianza servirá para entregar estimaciones más precisas. De la misma forma, estos modelos son válidos para la compra y venta de activos financieros, pues la decisión puede ser tomada en base a información proveniente del pasado (rentabilidad, volatilidad), lo que motiva y justifica la modelación de la heterocedasticidad condicional autorregresiva (De Arce, 1998). Los modelos GARCH (Generalized ARCH) fueron inicialmente planteados por Bollerslev (1986). En estos modelos es necesario hacer dos especificaciones, una para los rendimientos y otra para la varianza condicional. El modelo básico GARCH (1,1), cuenta con un término ARCH y un término GARCH ambos de primer orden, el cual tiene la siguiente especificación:

$$y_t = x_t^{'} \cdot \gamma + \varepsilon_t \tag{8}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \cdot \varepsilon_{t-1}^{2\,'} + \beta \cdot \sigma_{t-1}^2 \tag{9}$$

La ecuación (8) asociada a la ecuación de los rendimientos puede ser expresada como una combinación lineal de variables exógenas $x_t^{'}$ y sus parámetros γ, más un término de error (ε_t). Dado que la varianza (σ_t^2) de un periodo es pronosticada a partir de información pasada, se conoce a esta varianza con el nombre de varianza condicional, la cual se encuentra expresada en la ecuación (9), donde los términos son:

ω : Media, valor de iniciación en torno al cual se producirán ciertas variaciones. Se entiende también como el valor a largo plazo sobre el cual se generan las expectativas y que es modificado de acuerdo a los que se encuentran a continuación.

ε_{t-1}^2 : Noticias sobre volatilidad del periodo pasado, medido como el residuo al cuadrado de la ecuación de los rendimientos con un rezago, lo que se conoce como el término ARCH.

σ_{t-1}^2 : Predicción de la varianza en el último periodo histórico, conocido como el término GARCH.

En este artículo se estimará la volatilidad condicional de los rendimientos asociados al tipo de cambio \$/USD usando el modelo Garch (1,1), el cual se utilizará como base de los pronósticos de volatilidad futura.

Simulación Montecarlo

La Simulación Montecarlo es un método que combina conceptos estadísticos (muestreo aleatorio) con la capacidad que tienen los computadores para generar números aleatorios y permitir la automatización de cálculos. Esta técnica se basa en el hecho que un valor esperado se obtiene a partir del valor medio obtenido en teoría, al realizar una alta cantidad de pruebas aleatorias.
Al aplicar simulación de Montecarlo para obtener el valor de una opción, se parte construyendo la trayectoria esperada de los pagos del activo subyacente bajo la suposición de la neutralidad al riesgo. Luego, los pagos se descuentan a la tasa libre de riesgo. Si se toma un activo subyacente *S* que da un pago al tiempo *T*, considerando que la tasa de interés es constante, se puede derivar su valor a través de los siguientes pasos:

1. Determinar una trayectoria aleatoria para el precio del subyacente *S* en un mundo neutral al riesgo.

2. Se calcula el pago del derivado.

3. Repetir los pasos 1 y 2 hasta obtener una muestra aleatoria lo suficientemente grande.

4. Calcular la media de los pagos obtenidos para estimar el valor esperado de los pagos bajo un mundo neutral al riesgo.

5. Descontar el valor esperado a la tasa libre de riesgo para obtener un valor estimado del derivado.

Supóngase que el proceso de un activo subyacente es:

$$dS = \hat{\mu}Sdt + \sigma Sd \tag{10}$$

donde:

dz : Es un proceso de Wiener ($\varepsilon\sqrt{\Delta t}$).

$\hat{\mu}$: Es el retorno esperado en un mundo neutral al riesgo. Corresponde a la diferencia de tasas de interés sin riesgo doméstica y extranjera en el caso del dólar americano.

σ : Es la volatilidad de los rendimientos asociados al dólar americano.

dS : Es la variación del tipo de cambio spot.

S : Es el precio spot.

dt : Es la variación en el tiempo.

Para simular la trayectoria seguida por *S*, se puede dividir la vida del derivado en *N* intervalos de longitud Δt y aproximar la ecuación como:

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \hat{\mu}S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{11}$$

donde:

$S(t)$: Es el valor de *S* en el tiempo *t.*

ε : Es una muestra aleatoria proveniente de una distribución normal estandarizada $N{\sim}(0{,}1)$.

Lo anterior permite obtener el valor S al tiempo Δt a partir del valor inicial de *S*, el valor de *S* al tiempo $2\Delta t$ puede ser calculado a partir del valor de *S* al tiempo Δt.

Por otro lado, el Lema de $It\hat{o}$ señala que si x sigue un proceso $It\hat{o}$ de difusión, su dinámica viene dada por:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{12}$$

Supóngase que G = G (x,t) sigue un proceso de difusión cuya diferencial estocástica viene dada por:

$$dG = \left[{(\partial G}\big/{\partial x)}\, a + {\partial G}\big/{\partial t} + \tfrac{1}{2}(\partial^2 G/\partial x^2)b^2 \right] dt + [\partial G/\partial x]bdz \tag{13}$$

Partiendo del hecho que:

$$dS = \hat{\mu}Sdt + \sigma Sdz \tag{14}$$

Se puede definir la función $G = \ln(S)$, la cual sigue un movimiento Browniano aritmético en tiempo continuo. Como $G = G(S,t)$, se tiene:

$$\partial G/_{\partial t} = 0 \; ; \partial G/_{\partial S} = 1/_{S} \; ; (\partial^2 G/\partial S^2) = -1/_{S^2} \tag{15}$$

Luego, resolviendo por medio del Lema de $It\hat{o}$, se tiene:

$$d\,G = \left[\frac{1}{S}\hat{\mu}S + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2 \left(-1/_{S^2}\right)\right] dt + [\sigma S/S]dz \tag{16}$$

En la práctica es usualmente más preciso simular $ln\,S$ en vez de *S*, por lo tanto resolviendo por medio del Lema de $It\hat{o}$, la diferencial estocástica tiene como resultado:

$$dln\,S = (\hat{\mu} - \sigma^2/_2)dt + \sigma dz \tag{17}$$

$$ln\,S(t + \Delta t) - \ln S(t) = (\hat{\mu} - \sigma^2/_2)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{18}$$

Lo que es equivalente a:

$$S(t + \Delta t) = S(t)exp\left[(\hat{\mu} - \sigma^2/_2)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}\right] \tag{19}$$

La cual es la ecuación utilizada para construir la trayectoria de *S*. La ventaja de trabajar con lnS, es que éste sigue un proceso Wiener generalizado, lo que implica que esta expresión se hace verdadera para todo instante de tiempo *T*.

$$lnS(T) - lnS(0) = (\hat{\mu} - \sigma^2/_2)T + \sigma\epsilon\sqrt{T} \tag{20}$$

Equivalentemente,

$$S(T) = S(0)exp\left[(\hat{\mu} - \sigma^2/_2)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}\right] \tag{21}$$

Esta expresión puede ser utilizada para la valoración de derivados que entregan una función de pago no estándar al tiempo *T*. En este artículo es utilizada para comprobar si la valuación de las opciones contempladas en la estrategia Collar costo cero convergen en promedio a la valuación de dichas opciones según la fórmula de Black-Scholes. Se espera que los resultados bajo ambos métodos de valuación no presenten diferencias estadísticamente significativas.

Datos

La serie mensual de tipo de cambio peso chileno/dólar americano ($/USD) desde enero del año 2000 a diciembre del año 2012 publicada por el Banco Central de Chile (www.bcentral.cl) es utilizada como base para fines de modelar y pronosticar la volatilidad condicional asociada a los rendimientos del dólar americano. Para lo anterior se consideró el periodo desde febrero de 2000 a diciembre de 2008 como periodo para modelar la volatilidad condicional a través de un modelo Garch (1,1) lo que una vez realizado permite crear un pronóstico de volatilidad condicional de largo plazo para el periodo de evaluación de la estrategia Collar costo cero que va desde enero de 2009 a diciembre de 2012. De esta manera, se consideraron 9 años de historia para modelar y 4 años para evaluar en base al pronóstico de volatilidad condicional de largo plazo generada a través de la especificación Garch (1,1). Como aproximación de la tasa sin riesgo doméstica se utilizó la tasa anualizada de los pagarés descontables del Banco Central de Chile (www.bcentral.cl), mientras que para la tasa sin riesgo extranjera se usó la tasa anual de los bonos del Tesoro de Estados Unidos (T-Bills) (www.federalreserve.gov). En ambos casos se consideraron los instrumentos con vencimiento mensual o más próximo compatibles con el vencimiento de las opciones europeas implícitas en la estrategia Collar costo cero desarrollada en este artículo.

RESULTADOS

El modelo Garch (1,1) que se implementó para estimar la volatilidad condicional asociada a los rendimientos mensuales continuos del dólar americano fue:

$$y_t = c(1) + c(2)AR(1) + \varepsilon_t \tag{22}$$

$$\sigma_t^2 = c(3) + c(4) \cdot \varepsilon_{t-1}^{2\,'} + c(5) \cdot \sigma_{t-1}^2 \tag{23}$$

donde $y_t = ln\ (S_t/S_{t-1})$ corresponde a los rendimientos mensuales continuos del dólar americano a partir del tipo de cambio spot observado en t y en t-1 respectivamente, considerando el periodo que va desde enero de 2000 a diciembre de 2008. Así los rendimientos se estimaron desde febrero de 2000 a diciembre de 2008. Se incorporó un término autorregresivo de primer orden en la ecuación (22) de los rendimientos del dólar americano a objeto de controlar la presencia de autocorrelación de primer orden detectada en la serie original y garantizar así que el término de error fuese aleatorio. Se realizaron pruebas a los residuos del modelo [ecuaciones (22) y (23)] mostrando un comportamiento normal (test de Jarque-Bera = 1.02 valor p = 0.6), sin presencia de procesos autorregresivos de mayor orden (test Ljung Box-Qstat = 39.45 valor p = 0.278) y homocedásticos (test de Ljung Box-Qstat = 29.14 valor p = 0.746) en base a 36 rezagos. Los resultados de la estimación de las ecuaciones (22) y (23) para el periodo febrero de 2000 a diciembre de 2008 son:

$$y_t = 0.002063 + 0.353647AR(1) + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.000022 - 0.090877 \cdot \varepsilon_{t-1}^{2\,'} + 1.068580 \cdot \sigma_{t-1}^2$$

Con las estimaciones anteriores la volatilidad (varianza) mensual condicional de largo plazo *(VCLP)* puede ser estimada como:

VCLP = C(3)/[1-C(4)-C(5)] = 0.000022/(1+0.090877-1.068580) = 0.00098668

Para convertir la varianza mensual en desviación estándar mensual obtenemos la raíz cuadrada del valor anterior = $0.00098668^{1/2}$ = 0.03141146. Luego para convertir la desviación estándar mensual *(DEM)* a desviación estándar anual *(DEA)* se aplica la siguiente relación, donde *T* representa el tiempo, en este caso un mes expresado en años:

$DEA = DEM/(T)^{1/2} = 0.03141146/(1/12)^{1/2} = 0.1088$ = 10.88% anual

La estimación anterior de 10.88% corresponde a la volatilidad espontánea anualizada que será usada en los modelos (SMC y Black-Scholes) de valuación de opciones incorporadas en la estrategia Collar costo cero. Las Figuras 1, 2 y 3 comparan la valuación de la opción de venta realizada por medio del modelo Black-Scholes y SMC, respectivamente, bajo tres diferentes escenarios que incluyen 100, 400 y 5000 caminos aleatorios. Para examinar la convergencia en la valuación de la opción entre SMC y Black-Scholes se aplicó un test t para comparar los valores promedios. Para efectos de valuación se consideró un precio de ejercicio K_0 = $649.32/USD igual al precio spot observado a fines de diciembre de 2008, una tasa anual sin riesgo compuesta continuamente del 8.038% y del 0.03% para Chile y Estados Unidos, respectivamente, observadas en igual fecha, un periodo de vencimiento para la opción de un mes y una volatilidad del 10.88% estimada a través del modelo Garch (1,1). Se usaron 40 muestras de SMC para la valuación de la opción con respecto al tipo de cambio al sensibilizar el valor de este último en $1 hasta que alcance los $610.32/USD. De acuerdo a Griffiths et al. (1993) para aplicar una prueba *t*, no existe un tamaño muestral predeterminado para que una distribución muestral sea una razonable aproximación. En algunos casos puede ser 30 o bien en otros más de 30. En este caso usamos 40. Como se puede observar en las respectivas figuras, la valuación de la opción de venta realizada a través de las SMC tiende a converger a la valuación de solución cerrada de Black-Scholes [ecuación (5)] en la medida que el número de caminos aleatorios se incrementa. Para confirmar lo anterior, se probó la siguiente hipótesis.

H_0 = El promedio de valuación de la opción de venta realizada por SMC = promedio de valuación de la opción de venta realizada por solución cerrada a través del modelo de Black-Scholes, versus H_1 = El promedio de valuación de la opción de venta realizada por SMC ≠ promedio de valuación de la opción de venta realizada por solución cerrada a través del modelo de Black-Scholes. La hipótesis nula es rechazada si el estadístico *t* es más alto que el correspondiente valor crítico de 1.96 bajo un intervalo de 95% de confianza estadística. La Tabla 1 presenta los resultados. Esta muestra en primer lugar que la desviación estándar de la valuación de la opción de venta realizada por SMC disminuye desde 9.12 a 8.84 con el aumento en el número de caminos aleatorios implementado en las simulaciones generando así un menor error estándar. En segundo lugar, se encuentra que todos los estadísticos *t* son menores al valor crítico de 1.96 sugiriendo que no existen diferencias estadísticamente significativas en los promedios, no siendo así posible rechazar la hipótesis nula. Además se encuentra que el valor *p* incrementa desde 0.25 a 0.68 con el número de caminos aleatorios implementados en las SMC.

El valor *p* más alto indica que la probabilidad de cometer un error del tipo 2 disminuye. Esto es cuando la hipótesis alternativa es falsa y ésta no es rechazada. En otras palabras, mientras más simulaciones sean realizadas, más precisa será la hipótesis nula que indica que el promedio de valuación de la opción de venta realizada por SMC es igual al promedio de valuación de la opción de venta realizada por solución cerrada a través del modelo de Black-Scholes. Figura 1: Precio de la opción de venta europea frente a cambios (disminuciones) en el precio spot del dólar americano ($/USD). Valuación de Black-Scholes versus Simulaciones de Monte Carlo. Número de caminos aleatorios para el subyacente m = 100.

Figura 1:Número de Caminos Aleatorios = 100

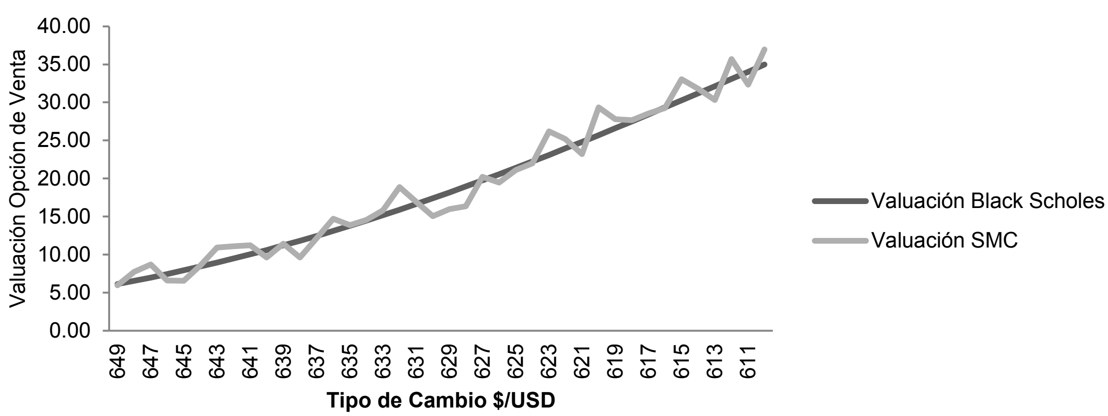

Figura 1 muestra la valuación de la opción de venta europea frente a cambios (disminuciones) en el precio del dólar americano ($/USD). Modelo de Black-Scholes versus Simulaciones de Monte Carlo (SMC). Línea sin quiebres Black-Scholes, línea con quiebres (SMC). Número de caminos aleatorios para el subyacente m = 100.

Figura 2: Precio de la opción de venta europea frente a cambios (disminuciones) en el precio spot del dólar americano ($/USD). Valuación de Black-Scholes versus Simulaciones de Monte Carlo. Número de caminos aleatorios para el subyacente m = 400

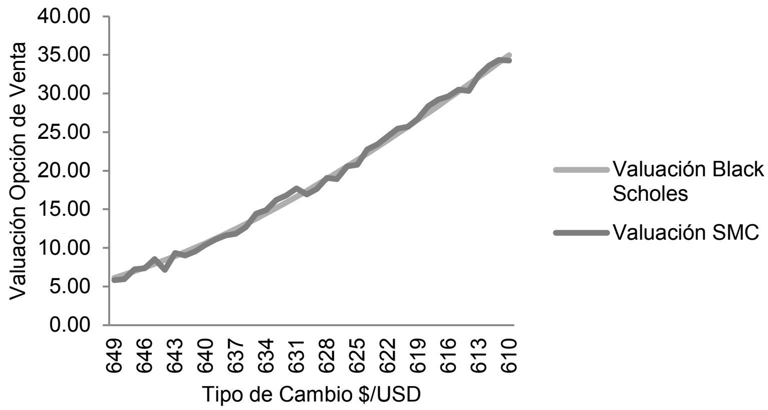

Figura 2 muestra la valuación de la opción de venta europea frente mbios (disminuciones) en el precio del dólar americano ($/USD). Modelo de Black-Scholes versus Simulaciones de Monte Carlo (SMC). Línea sin quiebres Black-Scholes, línea con quiebres (SMC). Número de caminos aleatorios para el subyacente m = 400.

Figura 3: Precio de la opción de venta europea frente a cambios (disminuciones) en el precio spot del dólar americano ($/USD). Valuación de Black-Scholes versus Simulaciones de Monte Carlo. Número de caminos aleatorios para el subyacente m = 5000

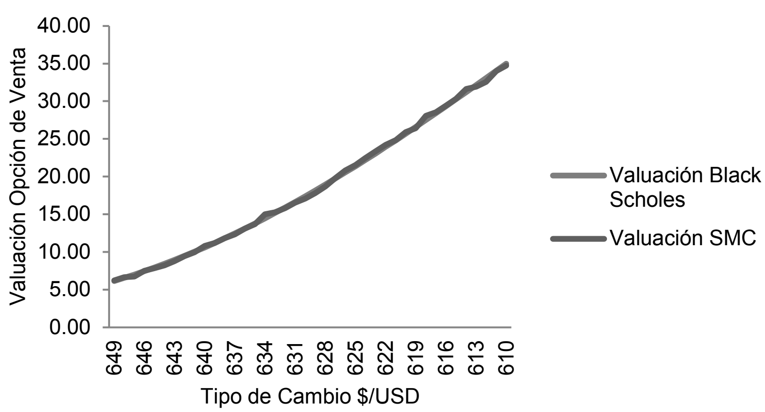

Figura 3 muestra la valuación de la opción de venta europea frente a cambios (disminuciones) en el precio del dólar americano ($/USD). Modelo de Black-Scholes versus Simulaciones de Monte Carlo (SMC). Línea sin quiebres Black-Scholes, línea con quiebres (SMC). Número de caminos aleatorios para el subyacente m = 5000.

Por otra parte, y a objeto de completar el análisis para la estrategia Collar costo cero, las Figuras 4, 5 y 6 comparan la valuación de la opción de compra europea realizada por medio del modelo Black-Scholes y SMC, respectivamente, bajo los mismos tres diferentes escenarios analizados para la opción de venta, los cuales incluyen 100, 400 y 5000 caminos aleatorios. Para examinar la convergencia en la valuación de esta opción entre SMC y Black-Scholes se aplicó el mismo test *t* aplicado a la opción de venta para comparar los valores promedios. Para efectos de valuación se consideró un precio de ejercicio K_1 = \$658.15/USD, una tasa anual sin riesgo compuesta continuamente del 8.038% y del 0.03% para Chile y Estados Unidos, respectivamente, observadas a fines de Diciembre de 2008, un periodo de vencimiento para la opción de un mes y una volatilidad del 10.88% estimada a través del modelo Garch (1,1). El precio de ejercicio K_1 anterior permite igualar el valor de la opción de venta con el valor de la opción de compra, bajo la valuación de Black-Scholes (con un precio spot para el dólar americano de $649.32), el cual resulta en $6.13 para ambas opciones, generándose así una estrategia Collar costo cero para el mes de enero de 2009, el cual corresponde al primer mes del periodo de evaluación. Al igual que el caso anterior se usaron 40 muestras de SMC para la valuación de la opción con respecto al tipo de cambio al sensibilizar el valor de este último en $1 hasta que alcance los $688.32/USD.

Como se puede observar en las respectivas figuras, la valuación de la opción de compra realizada a través de las SMC tiende a converger a la valuación de solución cerrada de Black-Scholes [ecuación (4)] en la medida que el número de caminos aleatorios se incrementa. Para confirmar lo anterior, se probó la siguiente hipótesis. H_0 = El promedio de valuación de la opción de compra realizada por SMC = promedio de valuación de la opción de compra realizada por solución cerrada a través del modelo de Black-Scholes, versus H_1 = El promedio de valuación de la opción de compra realizada por SMC $\neq$ promedio de valuación de la opción de compra realizada por solución cerrada a través del modelo de Black-Scholes. Resultados similares son obtenidos en relación al caso de la opción de venta.

La Tabla 2 presenta los resultados. Esta muestra en primer término que la desviación estándar de la valuación de la opción de compra realizada por SMC disminuye desde 9.31 a 8.84 con el aumento en el número de caminos aleatorios implementados en las simulaciones generando así un menor error estándar. En segundo término, se encuentra que todos los estadísticos *t* son menores al valor crítico de 1.96 sugiriendo que no existen diferencias estadísticamente significativas en los promedios, no siendo así posible rechazar la hipótesis nula. Además se encuentra que el valor *p* incrementa desde 0.21 a 0.94 con el número de caminos aleatorios implementados en las SMC. Así, mientras más simulaciones sean realizadas, más precisa será la hipótesis nula que indica que el promedio de valuación de la opción de compra realizada por SMC es igual al promedio de valuación de la opción de compra realizada por solución cerrada a través del modelo de Black-Scholes.

Figura 4: Precio de la Opción de Compra Europea Frente a Cambios (Aumentos) en el Precio Spot del Dólar Americano ($/USD). Valuación de Black-Scholes Versus Simulaciones de Monte Carlo. Número de Caminos Aleatorios Para el Subyacente M = 100

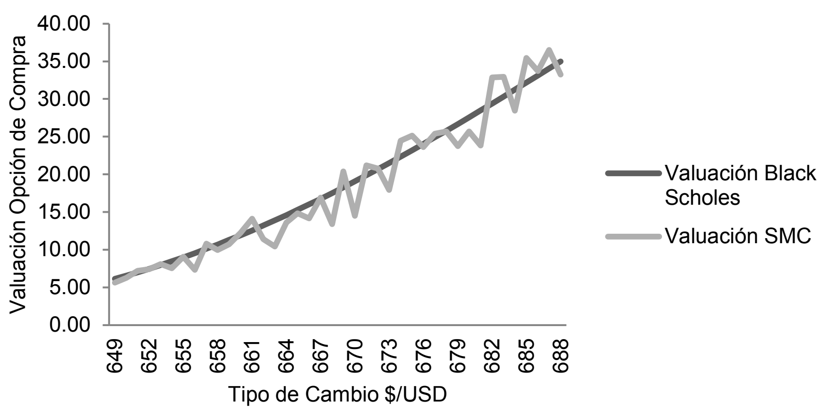

Figura 4 muestra la valuación de la opción de venta europea frente a cambios (aumentos) en el precio del dólar americano ($/USD). Modelo de Black-Scholes versus Simulaciones de Monte Carlo (SMC). Línea sin quiebres Black-Scholes, línea con quiebres (SMC). Número de caminos aleatorios para el subyacente m = 100.

Figura 5: Precio de la Opción de Compra Europea Frente a Cambios (Aumentos) en el Precio Spot del Dólar Americano ($/USD). Valuación de Black-Scholes Versus Simulaciones de Monte Carlo. Número de Caminos Aleatorios Para el Subyacente M = 400

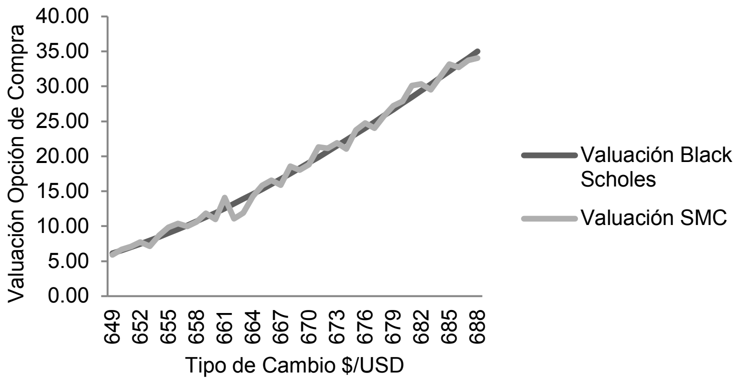

Figura 5 muestra la valuación de la opción de venta europea frente a cambios (aumentos) en el precio del dólar americano ($/USD). Modelo de Black-Scholes versus Simulaciones de Monte Carlo (SMC). Línea sin quiebres Black-Scholes, línea con quiebres (SMC). Número de caminos aleatorios para el subyacente m = 400.

Figura 6: Precio de la Opción de Compra Europea Frente a Cambios (Aumentos) en el Precio Spot del Dólar Americano ($/USD). Valuación de Black-Scholes Versus Simulaciones de Monte Carlo. Número de Caminos Aleatorios Para el Subyacente M = 5000

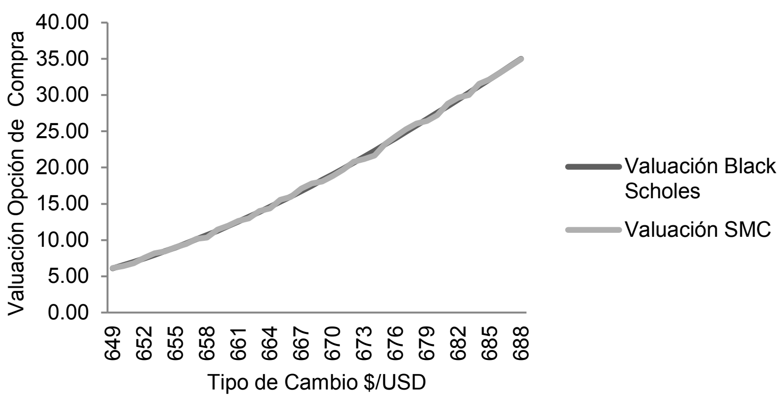

Figura 6 muestra la valuación de la opción de venta europea frente a cambios (aumentos) en el precio del dólar americano ($/USD). Modelo de Black-Scholes versus Simulaciones de Monte Carlo (SMC). Línea sin quiebres Black-Scholes, línea con quiebres (SMC). Número de caminos aleatorios para el subyacente m = 5000.

Tabla 1: Prueba T de Convergencia en la Valuación Promedio de la Opción de Venta Europea. SM Versus Black-Scholes (Número de Muestras = 40)

	Caso 1 (m=100)	Caso 2 (m=400)	Caso 3 (m=5000)
Desviación estándar en la valuación de la opción realizada a través de SMC	9.12632	8.96137	8.84335
Promedio de las diferencias en valuación realizadas entre SMC y Black-Scholes	0.29977	0.05708	0.01553
Varianza de las diferencias en valuación realizadas entre SMC y Black-Scholes	2.62135	0.34701	0.05412
Número de muestras	40	40	40
Estadístico t/valor p	1.1710/0.25	0.6128/0.54	0.4221/0.68
Prueba de hipótesis	No se rechaza H_0	No se rechaza H_0	No se rechaza H_0

La Tabla 1: indica que a medida que aumenta el número de caminos aleatorios en las simulaciones se produce una convergencia más significativa en la valuación de la opción de venta europea entre SMC y el modelo de Black-Scholes.

Tabla 2: Prueba T de Convergencia en la Valuación Promedio de la Opción de Compra Europea. SMC Versus Black-Scholes (Número de Muestras = 40)

	Caso 1 (m=100)	**Caso 2 (m=400)**	**Caso 3 (m=5000)**
Desviación estándar en la valuación de la opción realizada a través de SMC	9.30715	8.89869	8.83502
Promedio de las diferencias en valuación realizadas entre SMC y Black-Scholes	-0.42192	0.04640	-0.00295
Varianza de las diferencias en valuación realizadas entre SMC y Black-Scholes	4.35326	0.75706	0.05639
Número de muestras	40	40	40
Estadístico t/valor p	1.2790/0.21	0.3372/0.74	0.0785/0.94
Prueba de hipótesis	No se rechaza H_0	No se rechaza H_0	No se rechaza H_0

La Tabla 2 indica que a medida que aumenta el número de caminos aleatorios en las simulaciones se produce una convergencia más significativa en la valuación de la opción de compra europea entre SMC y el modelo de Black-Scholes.

Los resultados reportados en Tablas 1 y 2 permiten concluir que la valuación de la estrategia Collar costo cero seguida por un exportador chileno converge al mismo precio ya sea usando el modelo de Black-Scholes versus la técnica de Monte Carlo cuando el número de caminos aleatorios aumenta en las simulaciones implementadas. A continuación se utilizará el modelo de Black-Scholes para evaluar los resultados de la estrategia asumiendo que el exportador busca cobertura mensual para los retornos de exportación en dólares americanos. La Tabla 3 reporta los resultados. En la evaluación se asume que a fin de cada mes (desde diciembre de 2008 a diciembre de 2012) el exportador compra una opción de venta europea con precio de ejercicio K_0 igual al precio spot observado para el dólar americano en ese momento, con fecha de vencimiento de un mes y vende simultáneamente una opción de compra europea con precio de ejercicio K_1 sobre el mismo subyacente e igual fecha de vencimiento.

Para valuar ambas opciones se utilizó la valuación de Black-Scholes [ecuaciones (5) y (4)], asumiendo una volatilidad de 10.88% anual y las respectivas tasas sin riesgo anuales compuestas continuamente a partir de las reportadas mensualmente para Chile y Estados Unidos. K_1 se estimó como aquel precio de ejercicio que permite igualar el precio de la opción de venta con el precio de la opción de compra dados los demás factores que determinan el precio de las opciones, esto es: K_0, las tasas sin riesgo, el tiempo de maduración de las opciones y la volatilidad. De esta forma, el costo de la estrategia es cero. La primera columna de la Tabla 3 muestra el periodo de evaluación de la estrategia Collar costo cero, la segunda indica el precio spot del dólar americano de fin de mes, expresado en \$/USD, la tercera señala el precio de ejercicio K_0 (\$/USD), la cuarta muestra el precio de ejercicio K_1 (\$/USD), la quinta y la sexta columnas muestran el precio de la opciones de venta y de compra europeas, respectivamente.

Este se obtiene aplicando las ecuaciones (5) y (4) donde se han dado valores a; el tiempo de maduración de las opciones (1 mes), las tasas de interés sin riesgo observadas a fin de cada mes para Chile y Estados Unidos, la volatilidad anual del 10.88% proyectada como la de largo plazo a partir del modelo Garch (1,1), K_0 *y* K_1. La séptima columna señala el costo de la estrategia. La octava columna indica el resultado de la estrategia Collar costo cero para el exportador chileno que busca cobertura mensual. Este resultado se obtiene de la siguiente manera: A fin de diciembre de 2008 se asume que el exportador compra una opción de venta desembolsando \$6.13 y vende una opción de compra recibiendo \$6.13, por tanto con un costo neto de cero para la estrategia. Ambas opciones las suscribe sobre un dólar americano con precio de ejercicio de \$649.3/USD y \$658.1/USD, respectivamente, y una fecha de vencimiento de un mes. Transcurrido el mes de enero de 2009, se evalúan los resultados de la estrategia. A fin de enero se observa un tipo de cambio de \$623/USD, como este es menor a K_0 = \$649.3/USD, el exportador ejerce la opción de venta obteniendo un resultado positivo de \$26.3/USD. Para el resto de los meses se sigue la misma lógica anterior. Nótese que en algunos meses se puede obtener ganancias, en otros pérdidas o bien hay meses en que las opciones no se ejercen.

Tabla 3: Resultado Estrategia Collar Costo Cero Para Exportador Chileno Que Busca Cobertura Mensual Para el Dólar Americano. Periodo Evaluación Desde Enero de 2009 Hasta Diciembre De 2012

	So	Ko	K_1	BS Pe(Ko)	BS Ce(K_1)	Collar Costo cero	Resultado Estrategia
Mes/año	$/USD	$/USD	$/USD	$	$	$	$/USD
Dec-08	649.3	649.3	658.1	6.131	6.131	0.000	
Jan-09	623.0	623.0	630.2	6.139	6.139	0.000	26.3
Feb-09	606.0	606.0	610.3	6.575	6.575	0.000	17.0
Mar-09	592.9	592.9	595.6	6.791	6.791	0.000	13.1
Apr-09	583.2	583.2	584.9	6.895	6.895	0.000	9.8
May-09	565.7	565.7	566.7	6.841	6.841	0.000	17.5
Jun-09	553.1	553.1	553.9	6.731	6.731	0.000	12.6
Jul-09	540.4	540.4	540.7	6.698	6.698	0.000	12.7
Aug-09	546.9	546.9	547.2	6.780	6.780	0.000	-6.2
Sep-09	549.1	549.1	549.4	6.785	6.785	0.000	-1.9
Oct-09	545.8	545.8	546.2	6.743	6.743	0.000	3.2
Nov-09	507.8	507.8	508.1	6.275	6.275	0.000	38.1
Dec-09	501.5	501.5	501.8	6.190	6.190	0.000	6.3
Jan-10	500.7	500.7	501.0	6.185	6.185	0.000	0.8
Feb-10	532.6	532.6	532.9	6.583	6.583	0.000	-31.5
Mar-10	523.2	523.2	523.5	6.480	6.480	0.000	9.4
Apr-10	520.6	520.6	520.9	6.459	6.459	0.000	2.5
May-10	533.2	533.2	533.4	6.622	6.622	0.000	-12.3
Jun-10	536.7	536.7	537.1	6.625	6.625	0.000	-3.2
Jul-10	531.7	531.7	532.6	6.437	6.437	0.000	4.9
Aug-10	509.3	509.3	510.9	5.989	5.989	0.000	22.4
Sep-10	493.9	493.9	496.0	5.698	5.698	0.000	15.4
Oct-10	484.0	484.0	486.2	5.550	5.550	0.000	9.9
Nov-10	482.3	482.3	484.5	5.509	5.509	0.000	1.7
Dec-10	474.8	474.8	477.1	5.376	5.376	0.000	7.5
Jan-11	489.4	489.4	492.0	5.510	5.510	0.000	-12.3
Feb-11	475.7	475.7	478.4	5.317	5.317	0.000	13.7
Mar-11	479.7	479.7	482.8	5.254	5.254	0.000	-1.3
Apr-11	471.3	471.3	474.9	5.063	5.063	0.000	8.3
May-11	467.7	467.7	471.7	4.922	4.922	0.000	3.6
Jun-11	469.4	469.4	473.5	4.916	4.916	0.000	0.0
Jul-11	462.9	462.9	467.0	4.850	4.850	0.000	6.5
Aug-11	466.8	466.8	470.9	4.890	4.890	0.000	0.0
Sep-11	483.7	483.7	487.9	5.069	5.069	0.000	-12.8
Oct-11	511.7	511.7	516.1	5.376	5.376	0.000	-23.8
Tabla 3. Continuación							
Nov-11	508.4	508.4	512.8	5.350	5.350	0.000	3.3
Dec-11	517.2	517.2	521.6	5.431	5.431	0.000	-4.4
Jan-12	501.3	501.3	505.4	5.331	5.331	0.000	15.8
Feb-12	481.5	481.5	485.5	5.091	5.091	0.000	19.9
Mar-12	485.4	485.4	489.5	5.120	5.120	0.000	0.0
Apr-12	486.0	486.0	490.1	5.121	5.121	0.000	0.0
May-12	497.1	497.1	501.2	5.250	5.250	0.000	-7.0
Jun-12	505.6	505.6	509.7	5.364	5.364	0.000	-4.4
Jul-12	491.9	491.9	495.9	5.231	5.231	0.000	13.7
Aug-12	481.0	481.0	484.7	5.138	5.138	0.000	10.9
Sep-12	475.0	475.0	478.8	5.037	5.037	0.000	6.0
Oct-12	475.4	475.4	479.2	5.047	5.047	0.000	0.0
Nov-12	480.6	480.6	484.4	5.118	5.118	0.000	-1.4
Dec-12	477.1	477.1	481.0	5.055	5.055	0.000	3.4

La Tabla 3 muestra que los resultados acumulados desde enero de 2009 a diciembre de 2012 indican una ganancia neta de $213.8, la que dividida en los 48 meses que abarca el periodo de evaluación genera una ganancia promedio mensual de $4.45/USD.

La suma de la octava columna de la Tabla 3 muestra que los resultados acumulados desde enero de 2009 a diciembre de 2012 generan una ganancia neta de $213.8, la que dividida en los 48 meses que abarca el periodo de evaluación, determina una ganancia promedio mensual de $4.45/USD. Lo anterior evidencia los beneficios que el exportador chileno podría capturar a través de una estrategia de cobertura con opciones sin costo neto actual, la cual se explica principalmente por el resultado de la apreciación del peso chileno en relación al dólar americano, la cual es difícil de anticipar oportunamente por los agentes económicos y que conlleva al exportador a ejercer relativamente más veces la opción de venta (30 veces) que a su contraparte la opción de compra (13 veces), generándole beneficios netos de seguir la estrategia Collar costo cero.

CONCLUSIONES

El fuerte crecimiento de las exportaciones chilenas hace que sea relevante la búsqueda de mecanismos de cobertura de riesgo cambiario para quienes se dedican a este negocio. Uno de los mecanismos posibles y disponibles a través del sistema financiero (over the counter) en muchos países del mundo es la estrategia llamada Collar costo cero. En este tipo de estrategia, se tiene que el exportador paga y cobra una prima simultáneamente, paga como consecuencia de la compra de la opción de venta a "tipo de cambio piso K_0" y cobra como consecuencia de la venta de la opción de compra a "tipo de cambio techo K_1", por lo que puede darse el caso de que el costo de la combinación de ambas opciones sea cero. Diferentes ventajas se han asociado a este tipo de estrategia. Primero, la cobertura no posee un costo inicial. Segundo, el exportador fija un tipo de cambio mínimo para realizar la operación, que le permite cubrirse ante la caída del tipo de cambio. Tercero, es más flexible que un forward de tipo de cambio único. Cuarto, al ser una alternativa OTC (over the counter), el Collar se adecua perfectamente a las necesidades de los clientes en cuanto a montos, plazos, precios de ejercicio, entre otros. Por otra parte, la principal desventaja consiste en el techo fijado para el exportador que no le permitirá aprovechar la totalidad de los beneficios que entrega el mercado si el tipo de cambio sobrepasa el tipo de cambio techo K_1.

Dados que los potenciales beneficios de esta estrategia pueden superar a sus costos, este artículo se concentra en valuar las opciones europeas sobre el dólar americano contempladas en la estrategia Collar costo cero bajo dos métodos alternativos: SMC y Black-Scholes, para luego probar si existe convergencia en sus respectivas valuaciones en la medida que el número de caminos aleatorios en las SMC aumenta. El artículo continúa evaluando el desempeño de la estrategia, simulando a un exportador chileno que busque cobertura mensual frente al riesgo cambiario en el periodo 2009 a 2012. Los resultados reportados permiten concluir por una parte que la valuación de la estrategia Collar costo cero seguida por un exportador chileno converge al mismo precio ya sea usando el modelo de Black-Scholes o bien la técnica de Monte Carlo cuando el número de caminos aleatorios aumenta en las simulaciones implementadas. En términos estadísticos, no existen diferencias estadísticamente significativas en ambas valuaciones siendo éstas cada vez menos relevantes en la medida que efectivamente el número de caminos aleatorios para el subyacente (dólar americano) aumenta en las simulaciones.

Por otra parte, al evaluar los resultados de la estrategia Collar costo cero desde enero de 2009 a diciembre de 2012, éstos permiten cuantificar una ganancia neta de $213.8, la que dividida en los 48 meses que abarca el periodo de evaluación genera una ganancia promedio mensual de $4.45/USD. Lo anterior evidencia los beneficios que el exportador chileno podría capturar a través de una estrategia de cobertura con opciones sin costo neto actual, la cual se explica principalmente por el resultado de la apreciación del peso chileno en relación al dólar americano, la que es difícil de anticipar oportunamente por los agentes económicos y que conlleva al exportador a ejercer relativamente más veces la opción de venta (30 veces) que a su contraparte la opción de compra (13 veces), generándole beneficios netos de seguir la estrategia Collar costo cero. Finalmente, se recomienda como futura línea de investigación la valuación de las opciones implícitas en la estrategia Collar costo cero en otros contextos de países emergentes, que exhiban un fuerte crecimiento en su sector exportador, a objeto de evaluar su desempeño y así establecer comparaciones internacionales que contribuyan a la generalización de los resultados encontrados en este artículo.

REFERENCIAS

Barraquand, J y D. Martineau (1995), "Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 30: 383-405

Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity", *Journal of Econometrics* 31: 307:327.

Boyle et al., (1977), “Monte Carlo Methods for Security Pricing”, *Journal of Economic Dynamics and Control* 21: 1267-1321.

Carriere, J. (1996), “Valuation of the Early-Exercise Price for Options using Simulations and Nonparametric Regression”, *Insurance: Mathematics and Economics* 19:19-30.

Casas, M. y E, Cepeda (2008), “Modelos ARCH, GARCH y EGARCH: Aplicaciones a series”, *Cuadernos de Economía* 48: 287-319.

De Arce, R. (1998), Introducción a los Modelos Autorregresivos con Heterocedasticidad Condicional. España. Instituto de Predicción Económica “Lawrence R. Klein”.

Engle, R. (1982), “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with the Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation”, *Econometrica* 50: 987:1008.

Griffiths et al., (1993), Learning and Practicing Econometrics. John Wiley and Sons, Inc. Chapter 14.

Hull, J. (2012), Options, Futures and other Derivatives. Eight Edition. Prentice Hall. Chapter 20.

Hull, J. y A. White (1987), “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities”, *Journal of Finance* 42: 281-300.

Lamothe, P. (1993), Opciones Financieras. Un Enfoque Fundamental. McGraw-Hill.

Longstaff, F. y E, Schwartz (2001), “Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach”, *The Review of Financial Studies* 14: 113-147.

Schwartz, E y W. Torous (1989), “Prepayment and Valuation of Mortgaged-Backed Securities”, *Journal of Finance* 44, 375-392.

Tsisiklis, J.N. y B.Van Roy (1999), “Optimal Stopping for Markov Processes: Hilbert Space Theory, Approximation Algorithm and an Application to Pricing High-Dimensional Financial Derivatives”, *IEEE Transaction on Automatic Control* 44: 1840-1851.

www.bcentral.cl
www.federalreserve.gov

BIOGRAFÍA

Dr. Eduardo E. Sandoval es profesor asociado en: Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Concepción. Edmundo Larenas 215, Cuarto Piso, Concepción Chile, y puede ser contactado en correo electónico: eduardosandoval@udec.cl

Magíster Srta. Paula L. Urrutia se desempeña como Analista de Finanzas en Metro S.A y puede ser contactada en correo electrónico: paula.urrutia.rivera@gmail.com