

# **DISEÑO DE UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN A PARTIR DE UN MODELO DE PROGRAMACIÓN NO LINEAL: CASO COLOMBIA 2013-2014**

John Dairo Ramírez Aristizábal, Institución Universitaria ESUMER  
Eduardo Alexander Duque Grisales, Institución Universitaria ESUMER

## **RESUMEN**

*La relación existente entre el riesgo y la rentabilidad de un activo financiero es una preocupación constante del inversionista a la hora de conformar su portafolio de inversión. La principal meta en la construcción del portafolio consiste en distribuir óptimamente la inversión entre distintos activos teniendo en cuenta el concepto de diversificación. Este trabajo se centra en la aplicación de un modelo de programación no lineal para determinar un portafolio de inversión en el mercado de renta variable colombiano para los años 2013 y 2014, a partir del conjunto de combinaciones de activos que maximizan la ganancia esperada para un nivel determinado de riesgo o bien que minimizan el riesgo soportado para un nivel determinado de ganancia esperada. Para ello, se implementa y evalúa un modelo a partir de bases de datos históricas de los precios de los diferentes activos financieros del mercado de renta variable colombiano y se compara con los rendimientos reales obtenidos por portafolios de inversión en Colombia.*

**PALABRAS CLAVE:** Portafolio de Inversión, Programación No Lineal, Aversión al Riesgo, Activos Financieros

## **DESIGN OF A INVESTMENT PORTFOLIO USING NON-LINEAR PROGRAMMING: CASE OF COLOMBIA 2013-2014**

### **ABSTRACT**

*The relationship between risk and profitability of a financial asset is a constant concern of the investor in shaping their investment portfolio. The main goal in building the portfolio is to optimally allocate investments among different asset considering the concept of diversification. This paper focuses on the application of a nonlinear programming model for determining an investment portfolio in the Colombian market equities for the years 2013 and 2014, from the set of combinations of assets that maximize expected return for a given level of risk or that minimum risk for a given level of expected return. To do this, it implements and evaluates a model on a historical bases of financial asset prices in the Colombian equities market and compared them with the actual return on investment portfolios in Colombia.*

**JEL:** C02, C13, C14, C22, C53, C61, D81, D84, G00, G11, G23

**KEYWORDS:** Portfolio Investment, Nonlinear Programming, Risk Aversion, Financial Assets

### **INTRODUCCIÓN**

**L**a liberalización y el desarrollo del mercado de capitales colombiano en los últimos años han traído consigo productos más complejos y estructurados, que han incrementado el riesgo para los inversionistas. Además, en vista de la creciente globalización de la economía, donde los hechos financieros de importancia repercuten de inmediato en los mercados nacionales, los precios de los activos

financieros están cada vez más afectados por una mayor volatilidad de las variables macroeconómicas, como las fluctuaciones inesperadas en el tipo de cambio, los incrementos de las tasas de interés y las caídas de los índices bursátiles de acciones en los ámbitos nacional e internacional. Todo esto hace fundamental que los ejecutivos y los empresarios aprendan a gestionar el riesgo, con el fin de adoptar medidas que permitan cubrirse de éste y tomar decisiones acertadas oportunamente. El proyecto pretende evaluar un modelo para la conformación de portafolios eficientes que se fundamenta en la teoría de portafolios y el estudio de la frontera eficiente, dicho modelo se implementará como un modelo de programación no lineal el cual consiste en la optimización de una función objetivo sujeto a una serie de restricciones. El modelo será evaluado en el mercado de renta variable colombiano. Su objetivo principal es la generación de la frontera eficiente para encontrar carteras de inversión óptimas para inversionistas adversos, moderados y amantes del riesgo, adicionando además técnicas heurísticas y estadísticas para la composición y preselección de dichas carteras lo que ofrece mayor espectro y funcionalidad al modelo clásico de Markowitz. La motivación por indagar y evaluar modelos para la conformación de portafolios, se centra principalmente en que es un tema poco estudiado en Colombia, siendo relevante para establecer otros parámetros de investigación, que articulen las herramientas tecnológicas, modelos financieros y procesos de toma de decisiones con base en pronósticos matemáticos, con el entorno económico, caracterizado por un proceso de liberalización financiera, proliferación de nuevos productos y servicios en los mercados de capitales, los cuales han permitido nuevas posibilidades de inversión a los diferentes agentes económicos (familias, empresas y gobierno).

El artículo se ha estructurado de la siguiente manera: una primera parte correspondiente a esta introducción. Posteriormente, se presenta una revisión literaria en la que se abordan los conceptos básicos de teoría de portafolios que sustentan el uso de modelos de programación no lineal en el diseño de portafolios de inversión. Posteriormente se presenta la metodología de estudio, en donde se describe el procedimiento para calcular las variables del modelo y su aplicación en el mercado colombiano, identificando las covarianzas entre las acciones previstas y sus rentabilidades. Seguidamente se presentan los resultados de la investigación. Finalmente, el artículo se concluye con unos comentarios.

## REVISIÓN LITERARIA

### Teoría de Portafolios

La teoría de portafolio o cartera de inversiones, hace parte de los métodos desarrollados por Markowitz y sus seguidores para el manejo de inversiones en activos financieros. Ésta teoría sustenta que la generación de una cartera óptima de inversión supone más que una combinación deseable entre el riesgo y la ganancia de los activos que la pueden componer, lo más importante es realizar un análisis meticuloso de la relación entre ellos. La teoría explora además cómo los inversionistas construyen carteras para optimizar el riesgo contra los rendimientos esperados, es decir, mide cómo la cartera de un inversionista puede beneficiarse por medio de la diversificación (Markowitz, 1952). Esta teoría parte del supuesto que la mayoría de los inversionistas son adversos al riesgo, es decir, les interesa reducir el riesgo tanto como maximizar la rentabilidad esperada. Esto lo llevó a examinar el problema de encontrar un portafolio con el máximo retorno esperado a un nivel de riesgo dado. Para esto, propuso un modelo de programación cuadrática, el cual tenía como condiciones de primer orden el aumento marginal en la varianza de invertir un poco más en un activo dado y debería ser proporcional al retorno dado. Esta variación depende tanto de la varianza del retorno del activo, como de la covarianza del retorno de todos los demás activos del portafolio. Esta se considera como la idea central de la contribución de Markowitz.

Posteriormente Tobin (1958) y realizando una extensión del modelo de Markowitz, asume que los inversores pueden realizar préstamos bajo la misma tasa de interés. Llegando a la conclusión de que todos los agentes pueden seleccionar el mismo portafolio a pesar de que su actitud hacia el riesgo sea diferente. Por lo tanto, el trabajo del inversionista consiste en encontrar el punto de tangencia de la frontera eficiente,

que define el mejor portafolio en términos de rentabilidad para un nivel de riesgo dado y ajustar el balance entre riesgo y retorno esperado; siendo posible que dicho balance requiera inyección extra de efectivo y en los casos de iliquidez se justifique la adquisición de deuda. Las ideas de Markowitz (1952) y las de Tobin (1958) fueron fundamentales para que Sharpe (1964) desarrollara las bases del modelo de equilibrio de activos financieros, conocido como CAPM por sus siglas en inglés (Capital Asset Pricing Model). El objetivo del modelo es cuantificar e interpretar la relación que existe entre el riesgo y el rendimiento, y a través de esta relación lineal establecer el equilibrio de los mercados financieros. Como todo modelo económico el CAPM basa su pertinencia en supuestos más o menos restrictivos, que le han permitido conocer conclusiones universalmente aceptadas. En términos generales, se puede decir que la administración de portafolios de inversión consiste en mezclar diferentes activos financieros para obtener la combinación riesgo-rentabilidad que satisfaga las necesidades del inversionista, es decir, se trata de un método que permite diversificar la inversión para reducir el riesgo, lo cual se logra al repartir el capital del inversionista entre diferentes activos y seleccionar el portafolio óptimo, que no es más que aquel portafolio que pertenece a la frontera eficiente y que, combinado con una proporción de inversión en el activo libre de riesgo, maximiza la rentabilidad (Vélez-Pareja, 2001).

Dentro de las técnicas modernas para la determinación del riesgo se destaca el trabajo de Artzner et al. (1998), donde se plantea una serie de axiomas deseables que una medida de riesgo debería tener y bajo las cuales se definen los conjuntos de aceptación eficientes para un portafolio de inversión. Inicialmente Artzner et al. (1998) define el riesgo como una variable aleatoria que fluctúa de acuerdo a la variabilidad del valor futuro de una posición para sus diferentes estados de la naturaleza. Konno y Annista (1999) proponen un modelo de optimización a través de la desviación de la media absoluta, donde por medio de un esquema computacional se generan soluciones para la selección óptima del portafolio, bajo la existencia de costos de transacción cóncavos. Una función de costos es cóncava cuando el costo de transacción asociado a un título adicional es creciente, de hecho para el caso de un portafolio conformado por muchos títulos, los costos de transacción se tornan constantes y por ende la función se define como convexa.

Un método menos tradicional pero igual de atractivo para la selección de portafolios es el desarrollado por Zhang et al. (2008) por medio de la teoría de la posibilidad. Su metodología consiste en sustituir los conceptos de media y varianza probabilística utilizados por Markowitz, por el de media y varianza posibilística que provienen de un conjunto de números difusos. De acuerdo con los resultados obtenidos, esta técnica genera un escenario más favorable para la selección de inversiones eficientes ante situaciones de incertidumbre, contando además con gran potencia para el caso de un número elevado de títulos. En años recientes, se han publicado diferentes trabajos sobre este tema en Colombia, entre los que se destacan el de Vélez-Pareja (2001), Martínez, Restrepo y Velásquez (2004) y Dubova (2005). Becerra y Melo (2008) presentan un modelo de medición del riesgo por medio de funciones de distribución multivariadas conocidas como cópulas, las cuales, de manera general, describen el comportamiento conjunto de las variables aleatorias a través de sus comportamientos marginales, es decir, las cópulas explican la estructura de dependencia entre las variables. El gran reconocimiento de las cópulas en el campo financiero es debido al hecho de que su estructura de funcionamiento permite asignar de una manera correcta los riesgos asociados a la estrategia de inversión e incluso permiten segmentar el tipo de riesgo, al catalogarlo como riesgo financiero o riesgo de crédito.

### Portafolio Óptimo y Línea de Frontera Eficiente

Cuando se tiene un conjunto de  $n$  activos, cuya rentabilidad esperada (calculada como el valor medio de los rendimientos históricos) y riesgo (calculado como la desviación estándar de los rendimientos históricos) se conocen, es posible formar un número infinito de portafolios. Afortunadamente, un inversionista no necesita evaluar todas esas alternativas para elegir su portafolio óptimo, puesto que lo elegirá del conjunto de portafolios que ofrecen un rendimiento esperado máximo para niveles variables de riesgo y un riesgo mínimo para niveles variables de rendimiento esperado. Al conjunto de portafolios que cumplen estas dos

condiciones se le conoce como frontera eficiente (Markowitz, 1952). En la actualidad son muchas las herramientas computacionales que le permiten a un inversionista encontrar los portafolios de la frontera eficiente, siendo el Excel una de la más utilizadas, ya que con su componente Solver es posible desarrollar el modelo de optimización que se necesita. Al graficar el conjunto de portafolios eficientes se obtiene la Línea de Frontera Eficiente de Markowitz, que está curvada positivamente y es cóncava con su origen. Ahora, teniendo la línea de frontera eficiente, el inversionista procede a seleccionar su portafolio óptimo, el cual será diferente para cada inversionista, según sea el grado de aversión al riesgo. Los criterios para evaluar un portafolio de inversión son: medir el rendimiento en función de la ganancia esperada y medir el riesgo en función de la varianza.

*Rendimiento en función de la Ganancia Esperada:* la ganancia esperada de un activo cualquiera está definida como:

$$E[R] = \frac{(P_f - P_i)}{P_i} \quad (1)$$

donde,  $P_f$  y  $P_i$  representan el precio final e inicial del activo respectivamente. Como un portafolio de inversión está compuesto por varios activos, se define la ganancia esperada de una cartera como:

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^N w_i E[R_i] \quad (2)$$

donde,  $w_i$  representa la porción de la cartera invertida en la acción  $i$  y  $E[R_i]$  es la ganancia esperada de la acción  $i$ . *Riesgo en función de la Varianza:* la varianza para una acción particular está definida como:

$$Var(R_i) = \sigma^2 = E[R_i^2] - E^2[R_i] \quad (3)$$

Este riesgo medido en función de la varianza indica el grado de dispersión o variabilidad en relación a la esperanza sobre el rendimiento de dicha acción. Un valor alto de varianza o su desviación típica indica el alto grado de volatilidad o variabilidad en el rendimiento de dicha acción con respecto a su rendimiento promedio durante un arco de tiempo determinado. Sin embargo, como una cartera de inversión está compuesta por varios activos y según la teoría clásica de probabilidades y variables aleatorias; entonces, la varianza queda definida de la siguiente manera:

$$\sigma^2_p = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (4)$$

Donde  $x_i$ ,  $x_j$  representan la proporción invertida en el activo  $i$  y en el activo  $j$ ,  $\rho_{ij}$  es el coeficiente de correlación entre el activo  $i$  y  $j$  y  $\sigma_i \sigma_j$ , es la desviación estándar del activo  $i$  y  $j$ .  $\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$  es por definición la covarianza entre los activos  $i$  y  $j$ .

#### Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM)

Después de la formulación de la teoría de selección de portafolios de Markowitz, fueron varios los investigadores que, basados en ella, buscaron hacerle aportes importantes, tales como Sharpe, que en 1964 publicó el artículo “Capital Asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk”. El modelo de Markowitz supone que los inversionistas seleccionarán portafolios constituidos por activos riesgosos; el modelo CAPM lo que hizo fue extender el modelo de Markowitz al agregar un activo libre de riesgo ( $R_f$ ) al conjunto de activos con riesgo, que es un valor emitido por el gobierno de cada país, con un vencimiento que coincide con la duración del período de tenencia del inversionista, con una rentabilidad segura, es decir, no hay incertidumbre acerca de su valor terminal y, por lo tanto, su desviación estándar es

cero, al igual que la covarianza con otros activos riesgosos.

El objetivo del modelo es cuantificar e interpretar la relación que existe entre el riesgo y el rendimiento, y a través de esta relación lineal establecer el equilibrio de los mercados financieros. Como todo modelo económico el CAPM basa su pertinencia en supuestos más o menos restrictivos, que le han permitido conocer conclusiones universalmente aceptadas. Del teorema de la separación, planteado por Tobin en 1958, se desprende que el portafolio óptimo en la línea de frontera eficiente será el mismo para todos los inversionistas que forman el mercado, el cual estará ubicado en el punto de tangencia entre la línea que une la rentabilidad del activo libre de riesgo y la frontera eficiente de Markowitz. A este portafolio óptimo se le conoce como portafolio de mercado (M) y a la línea que une la rentabilidad del activo libre de riesgo con el portafolio de mercado (M) y va más allá de éste se le conoce como línea de mercado de capitales (CML) (Ho et al., 2000). La línea de mercado de capitales (CML o capital market line) representa la relación lineal entre el rendimiento esperado y el riesgo total para diferentes combinaciones del portafolio de mercado (M) y varias proporciones de préstamo o endeudamiento libres de riesgo. Entonces, con el CAPM la nueva frontera eficiente es la línea de mercado de capitales, en la cual los inversionistas encontrarán los mejores portafolios y podrán elegir su portafolio óptimo, según su nivel de aversión al riesgo. Con el préstamo libre de riesgo, el inversionista obtendrá el portafolio de menor riesgo y menor rentabilidad, comparado con el portafolio de mercado (M). El endeudamiento libre de riesgo le permite al inversionista superar la rentabilidad del portafolio de mercado, al invertir todo su dinero más el dinero prestado en el portafolio de activos riesgosos (Dubova, 2005).

#### Programación Lineal y No Lineal

La programación ha sido uno de los enfoques cuantitativos utilizado para la toma de decisiones en la administración. Se han reportado numerosas aplicaciones en las industrias química, del aerotransporte, del acero, del papel, del petróleo, entre otras. Los problemas de selección de cartera implican situaciones en las que los gerentes financieros deben elegir inversiones específicas (por ejemplo, acciones, bonos) a partir de diversas alternativas de inversión. Los administradores de fondos mutualistas, de uniones de crédito, de compañías de seguros y de bancos, encuentran frecuentemente este tipo de problemas. La función objetivo para los problemas de selección de cartera es por lo común la maximización del rendimiento esperado o la minimización de los riesgos. Las restricciones asumen, por lo general, la forma de restricciones sobre el tiempo de inversiones permisibles, leyes estatales, políticas de la compañía, máximo riesgo permisible, etcétera. Se han planteado y resuelto problemas de este tipo utilizando diversas técnicas de programación matemática. Sin embargo, si es posible plantear una función objetivo lineal y restricciones lineales en un problema específico de selección de cartera, entonces puede utilizarse la programación lineal para resolverlo, en el caso en que la función objetivo o alguna de las restricciones no sea lineal, se cataloga como un modelo de programación no lineal.

En este trabajo se muestra la forma en la que puede plantearse un problema de selección de cartera y el modo en que se puede resolver como un modelo de programación no lineal. En general, se observa que en la literatura financiera cada año incrementa el número de publicaciones relacionadas con el tema de selección de portafolios de inversión. En sus trabajos, Elton & Gruber (1987) y Zopounidis and Doumpos (2002) presentan varias técnicas cuantitativas que han sido aplicadas para la conformación de portafolios óptimos de inversión, como modelos estocásticos, análisis multi-criterios, análisis determinísticos, heurísticos, redes neuronales y programación multi-objetivo. Aouni et al. (2005) aplica su modelo para la selección de un portafolio conformado por 45 activos del Mercado de Acciones de Túnez. Fang et al. (2006) propone un modelo de programación lineal para la conformación de portafolios basados en la teoría de conjuntos difusos. Ben Abdelaziz, El Fayedh, and Rao (2009) propusieron un modelo de programación discreto para generar portafolios de inversión en el mercado de capitales de Emiratos Árabes Unidos. Zopounidis and Doumpos (2013) presentan una revisión completa de los diferentes procedimientos multi-criterio aplicados a la optimización de portafolios de inversión e incorporan la evaluación de la rentabilidad

del mismo. Es común encontrar en la literatura modelos de optimización de portafolios basados en técnicas de investigación de operaciones.

## METODOLOGÍA

Para la realización del proceso de selección de portafolios, se utilizó la información histórica de las rentabilidades diarias de las principales acciones que cotizan en la Bolsa de Valores de Colombia (BVC) durante los años 2012, 2013 y 2014. La BVC se encuentra conformada por 86 acciones, razón por la cual se deben definir mecanismos adecuados en pro de seleccionar los títulos que representen de una mejor forma la dinámica del mercado. De esta manera, y teniendo en cuenta el índice de bursatilidad más representativo en la bolsa y la alta liquidez de las acciones, se seleccionarán los títulos que conforman el índice COLCAP para la conformación de los portafolios de inversión. La canasta que conforma dicho índice se calcula de manera trimestral. En la tabla 1 se presentan los 20 títulos que estuvieron en mayor proporción durante el período de análisis de este trabajo.

Tabla 1: Títulos Valores de Alta Liquidez Durante El Período 2013-2014 Que Cotizan En la BVC

Nemotécnico	Emisor
Bogota	Banco de Bogotá
Bvc	Bolsa de Valores de Colombia
Celsia	Celsia
Clh	Cemex
Cnec	Canacol Energy
Corficolcf	Corficolombiana
Ecopetrol	Ecopetrol
Eeb	Empresa de Energía de Bogotá
Exito	Almacenes Éxito
Grupoargos	Grupo Argos
Isa	Interconexión Eléctrica S.A.
Isagen	Isagen
Nutresa	Grupo Nutresa
Pfaval	Grupo Aval
Pfavh	Avianca
Pfbcolom	Bancolombia
Pfcemargos	Grupo Argos
Pfdavvnda	Banco Davivienda
Pfgrupsura	Grupo Sura
Prec	Pacific Rubiales

*En esta tabla se muestra el nemotécnico y el nombre de la empresa de las 20 acciones de alta liquidez durante el periodo (2013-2014) que conforman el índice COLCAP; un índice de referencia para el mercado accionario colombiano. Fuente: Elaboración propia.*

Inicialmente se analizará un portafolio conformado por 20 acciones de la Bolsa de Valores de Colombia, el cual está conformado por 760 datos con la información del precio de cierre mensual para hacer el cálculo de los rendimientos mensuales de los últimos tres años que han presentado los activos seleccionados. La información es obtenida desde el primero de enero del 2012 hasta el 31 de diciembre del 2014. Con las rentabilidades mensuales de cada activo se calculó la rentabilidad promedio y la matriz de varianzas y covarianzas del conjunto de acciones con el fin de establecer los parámetros necesarios (Ruppert, 2004) para aplicar el modelo de programación no lineal (Ragsdale, 2008) que se explica a continuación: En forma matricial se tiene que la varianza de un portafolio de inversiones es:

$$\sigma_p^2 = PCP^T \tag{5}$$

Donde:

$\sigma_p^2$ : es la varianza del portafolio

$$P = [P_1 P_2 P_3 \dots P_n] \quad (6)$$

Es el vector de proporciones o porcentajes a invertir en cada activo financiero que conforma el portafolio.

$P^T$ : es el vector de proporciones transpuesto

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

(7)

$C$ : es la matriz de varianzas y covarianzas de los activos financieros La función a maximizar considerando múltiples objetivos que son: minimizar el riesgo (la varianza del portafolio) y maximizar la rentabilidad esperada, es:

$$Max Z = (1 - r)R - r\sigma_p^2 \quad (8)$$

Donde:

$R$ : es la rentabilidad esperada del portafolio

$r$ : es una constante entre 0 y 1, y representa la aversión al riesgo del inversionista

$r = 1$ , indica la máxima aversión al riesgo, es decir, que al inversionista no le gusta correr riesgos y por tanto buscará minimizar la varianza del portafolio:  $Max Z = -\sigma_p^2$

$r = 0$ , indica que al inversionista le gusta correr el riesgo, es decir, es amante del riesgo y por lo tanto lo que busca es maximizar el rendimiento esperado:  $Max Z = R$

El modelo está sujeto a las siguientes restricciones: La suma de las componentes del vector de proporciones (2) no puede superar el 100%, es decir, que el capital invertido en el portafolio no puede exceder al máximo disponible:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad (9)$$

Se debe garantizar un nivel mínimo de rentabilidad en el portafolio de inversiones y esto se logra con la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1}^n \mu_i P_i \geq \mathfrak{R} \quad (10)$$

$\mu_i$ : es la rentabilidad promedio de los activos.

$\mathfrak{R}$ : es el rendimiento mínimo requerido del portafolio.

Las componentes del vector de proporciones pueden tomar valores entre cero y uno:

$$0 \leq P_i \leq 1 \quad (11)$$

Para implementar el modelo se utilizó la herramienta Solver del software Microsoft Excel obteniendo el portafolio óptimo para el primer mes del año 2013, posteriormente se procede a calcular la rentabilidad real con base en los resultados arrojados por el modelo para el primer mes del 2013, el procedimiento se repite para los 23 meses siguientes hasta diciembre 2014. Finalmente se calcula la rentabilidad acumulada durante el año 2013 y 2014 obtenida con el modelo y definida para cada nivel de riesgo a partir de la variable aversión al riesgo; por último se compara el rendimiento real obtenido del portafolio con la rentabilidad promedio entregada por los fondos de pensiones, con el propósito de medir la eficiencia del modelo.

## RESULTADOS Y VÁLIDEZ DEL MODELO

Para ilustrar los enfoques para la conformación de portafolios de inversión discutidos en este trabajo y nuestro modelo propuesto, elegimos una cartera conformada por 20 acciones del mercado de renta variable en Colombia. Sobre la base de datos históricos de los precios de transacción de cada activo se procedió a calcular las rentabilidades mensuales de cada activo durante el período comprendido entre diciembre de 2012 a diciembre de 2014. Para cada una de estas acciones se le realizó un análisis estadístico a los datos de rentabilidad mensual. En la tabla 2 se presentan los resultados obtenidos de estadística descriptiva de una muestra de 10 de los activos financieros más representativos dentro de la canasta COLCAP.

Tabla 2: Estadísticos Descriptivos de las Rentabilidades Mensuales de una Muestra de 10 Activos Financieros

Estadísticos/Activos	Ecop	Pfbcol	Gruarg	Pfcmar	Exito	Bogo	Pfdavv	Corfi	Bvc	Eeb
Media	-1.6%	-0.1%	0.5%	0.2%	0.2%	0.7%	0.8%	0.3%	-0.7%	1.0%
Error típico	1.2%	0.8%	1.0%	0.8%	1.1%	0.6%	0.9%	0.6%	1.1%	0.9%
Mediana	-0.6%	0.1%	0.7%	0.0%	-0.8%	-0.1%	1.0%	0.5%	-0.2%	0.5%
Desviación estándar	7.3%	5.1%	5.9%	4.9%	7.0%	3.7%	5.6%	3.9%	6.7%	5.5%
Varianza de la muestra	0.5%	0.3%	0.3%	0.2%	0.5%	0.1%	0.3%	0.2%	0.5%	0.3%
Curtosis	-22.3%	81.4%	-37.9%	49.0%	102.1%	117.8%	-46.6%	133.5%	5.9%	40.2%
Coefficiente de asimetría	9.4%	49.3%	13.4%	-30.2%	53.2%	63.5%	-14.3%	-32.8%	31.7%	-16.2%
Rango	31.9%	25.2%	22.9%	21.4%	32.8%	18.2%	22.2%	19.3%	30.1%	27.2%
Mínimo	-16.7%	-10.7%	-9.9%	-11.5%	-14.4%	-7.1%	-9.6%	-10.4%	-13.2%	-13.0%
Máximo	15.1%	14.6%	13.0%	9.9%	18.4%	11.1%	12.6%	9.0%	16.9%	14.2%
Nivel de confianza (95,0%)	2.41%	1.67%	1.94%	1.61%	2.29%	1.21%	1.83%	1.28%	2.22%	1.80%

En esta tabla se presentan las variables de estadística descriptiva evaluadas de las rentabilidades mensuales de 10 de los diferentes activos que conforman la canasta del COLCAP. Se presenta en promedio un comportamiento positivo en los rendimientos de las acciones más utilizadas por el modelo de PNL y con un error estadístico dentro del rango permitido.

Para conformar de manera óptima los portafolios de inversión mes a mes, el modelo propuesto se basa en el *benchmark* para determinar el comportamiento de las inversiones que se realizan. Adicionalmente, se definen unas variables a tener en cuenta por el modelo, como la varianza y covarianza del portafolio, el rendimiento mínimo requerido por el inversionista y el nivel de aversión al riesgo. El rendimiento mínimo del inversionista se tomó como el 5% basado en la información del mercado de renta fija en Colombia. Con el fin de identificar la influencia del coeficiente de aversión  $r$  en las decisiones de inversión, en este trabajo consideramos 10 tipos de inversionistas, desde inversores amantes al riesgo ( $r = 0.0$ ) hasta inversionistas conservadores que no le gusta correr riesgos ( $r = 1.0$ ). Los resultados de la covarianza de 10 de los activos del COLCAP se presenta en la Tabla 3.



Tabla 3: Matriz de Covarianza de Una Muestra de 10 Activos Financieros de la Canasta del COLCAP

	<b>Ecop</b>	<b>Pfbcol</b>	<b>Gruarg</b>	<b>Pfcmar</b>	<b>Exito</b>	<b>Corfi</b>	<b>Bogt</b>	<b>Isag</b>	<b>Pfdavv</b>	<b>Clh</b>	<b>Bvc</b>
<b>Ecop</b>	0,38%	0,14%	0,25%	0,11%	0,16%	0,09%	-	0,06%	0,05%	0,12%	0,11%
<b>Pfbcol</b>	0,14%	0,26%	0,17%	0,10%	0,08%	0,06%	0,03%	0,04%	0,10%	0,16%	0,04%
<b>Gruarg</b>	0,25%	0,17%	0,38%	0,16%	0,10%	0,13%	0,04%	0,06%	0,15%	0,23%	0,11%
<b>Pfcmar</b>	0,11%	0,10%	0,16%	0,22%	0,12%	0,09%	0,05%	0,07%	0,14%	0,18%	0,05%
<b>Exito</b>	0,16%	0,08%	0,10%	0,12%	0,42%	0,11%	0,06%	0,13%	0,14%	-0,03%	0,17%
<b>Corfi</b>	0,09%	0,06%	0,13%	0,09%	0,11%	0,16%	0,06%	0,09%	0,07%	0,03%	0,09%
<b>Bogt</b>	-0,03%	0,04%	0,04%	0,05%	0,06%	0,06%	0,15%	0,07%	0,06%	0,08%	0,06%
<b>Isag</b>	0,06%	0,03%	0,06%	0,07%	0,13%	0,09%	0,07%	0,26%	0,10%	0,06%	0,10%
<b>Pfdavv</b>	0,05%	0,10%	0,15%	0,14%	0,14%	0,07%	0,06%	0,10%	0,28%	0,19%	0,06%
<b>Eeb</b>	0,18%	0,13%	0,20%	0,13%	0,18%	0,12%	0,06%	0,17%	0,13%	0,15%	0,11%
<b>Clh</b>	0,12%	0,16%	0,23%	0,18%	0,03%	0,03%	0,08%	0,06%	0,19%	0,52%	0,08%
<b>Bvc</b>	0,11%	0,04%	0,11%	-0,05%	0,17%	0,09%	0,06%	0,10%	0,06%	-0,08%	0,35%

En esta tabla se presenta la covarianza existente entre los diferentes activos que conforman la canasta del COLCAP. Se presenta una muestra de 10 activos financieros y la covarianza que presentan entre sí. Un menor valor de la covarianza representa minimizar el riesgo del portafolio. Se resalta la acción de preferencial cementos argos (PFCMAR) por su amplia utilización en los portafolios seleccionados por el modelo. Según la selección del portafolio a partir del objetivo de minimizar el riesgo, el modelo tiene preferencias al seleccionar la acción de PFCMAR con la acción de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC) por su menor valor de covarianza (-0.05).

Aplicando la metodología descrita en el apartado anterior hemos obtenido los 24 portafolios de inversión para cada uno de los meses del período de estudio, teniendo en cuenta el nivel de aversión al riesgo de los inversionistas. Las tablas 4 y 5 presentan un ejemplo de las carteras de inversión arrojadas por el modelo para el año 2013 para dos niveles de aversión al riesgo, un  $r = 1.0$  y un  $r = 0.4$  respectivamente.

Tabla 4: Conformación de Portafolios con un Nivel de Aversión al Riesgo  $R = 1.0$  Para el Año 2013

<b>Port.</b>	<b>Pfcmar</b>	<b>Eeb</b>	<b>Bogt</b>	<b>Pfdavv</b>	<b>Exito</b>	<b>Pfbcol</b>	<b>Clh</b>	<b>Gruarg</b>	<b>Ecop</b>	<b>Bvc</b>	<b>Corfi</b>	<b>Isag</b>
012013	78.7%	-	-	2.3%	7.6%	-	-	5.2%	6.2%	-	-	-
022013	77.0%	1.9%	-	4.7%	6.1%	-	4.4%	4.1%	1.8%	-	-	-
032013	78.9%	3.1%	-	5.0%	5.4%	-	4.0%	3.5%	-	-	-	-
042013	80.4%	8.0%	-	10.0%	-	-	1.7%	-	-	-	-	-
052013	75.2%	7.2%	10.9%	5.9%	-	-	0.7%	-	-	-	-	-
062013	81.5%	8.1%	9.2%	-	-	-	1.2%	-	-	-	-	-
072013	72.5%	13.9%	11.7%	-	-	-	-	-	-	-	0.9%	0.9%
082013	62.0%	6.8%	5.9%	-	1.3%	1.1%	-	-	-	15.3%	7.6%	-
092013	60.6%	-	11.1%	-	1.9%	7.5%	0.7%	-	-	16.3%	1.8%	-
102013	37.9%	-	24.9%	-	-	-	-	-	11.2%	11.6%	4.3%	5.6%
112013	13.9%	15.5%	22.2%	7.0%	17.0%	24.4%	-	-	-	-	-	-
122013	5.8%	0.7%	20.9%	-	8.4%	26.0%	-	-	4.0%	11.1%	7.3%	15.8%

En esta tabla se presenta la conformación de portafolios arrojadas por el modelo para un nivel de aversión al riesgo de 1.0, es decir una persona con un perfil conservador. Se observa como en los portafolios de los doce meses se presenta inversión en la acción de preferencial cementos Argos, debido a su comportamiento positivo durante todo el año 2013. Se observa para este nivel de riesgo una mayor diversificación en la conformación de los portafolios, con más de 4 activos financieros del mercado colombiano.

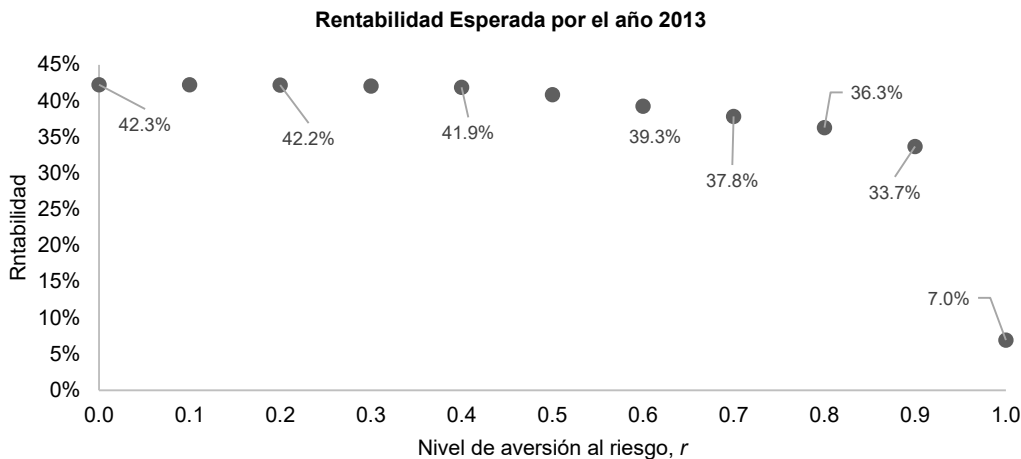
Tabla 5: Conformación de Portafolios con un Nivel de Aversión al Riesgo  $R = 0.4$  Para el Año 2013

Port.	Exito	Gruparg	Pfdavv	Eeb	Bogt	Clh	Cnec
012013	100%	-	-	-	-	-	-
022013	26.4%	73.6%	-	-	-	-	-
032013	67.3%	32.7%	-	-	-	-	-
042013	-	-	24.9%	75.1%	-	-	-
052013	-	-	-	100%	-	-	-
062013	-	-	-	11.6%	88.4%	-	-
072013	-	-	-	56.8%	43.2%	-	-
082013	-	-	-	-	95.4%	4.6%	-
092013	-	-	-	-	100%	-	-
102013	-	-	-	-	73.2%	26.8%	-
112013	-	-	-	-	-	-	100%
122013	-	-	-	-	-	-	100%

En esta tabla se presentan la conformación de portafolios arrojadas por el modelo para un nivel de aversión al riesgo de 0.4, es decir una persona con un perfil moderado. Se observa para este nivel de riesgo muy poca diversificación en la conformación de la cartera, privilegiando la selección del activo con una rentabilidad histórica promedio más alta.

Después de obtener la conformación de los portafolios de inversión arrojados por el modelo, se procedió a calcular los rendimientos esperados de dichas carteras y a compararlo con el rendimiento real que se hubiera obtenido aplicando la solución del modelo. La rentabilidad esperada del portafolio se calcula teniendo en cuenta la rentabilidad promedio de los últimos doce meses de cada activo financiero, teniendo en cuenta la metodología del *benchmark*. Los datos calculados se pueden observar en la Figura 1.

Figura 1: Rentabilidad Acumulada Esperada Para el Año 2013 en Función de la Aversión al Riesgo.



Esta figura presenta la rentabilidad acumulada para el año 2013 según nivel de aversión al riesgo que esperaría obtener un inversionista después de la aplicación del modelo propuesto. Los datos muestran comportamientos positivos durante el año 2013. Fuente: Datos (BYC, 2013) Cálculos propios.

En la Tabla 6 se muestran los rendimientos reales mensuales y acumulados durante el año 2013 por nivel de aversión al riesgo, después de aplicar el modelo de programación no lineal para cada uno de los 12 meses de evaluación del portafolio.

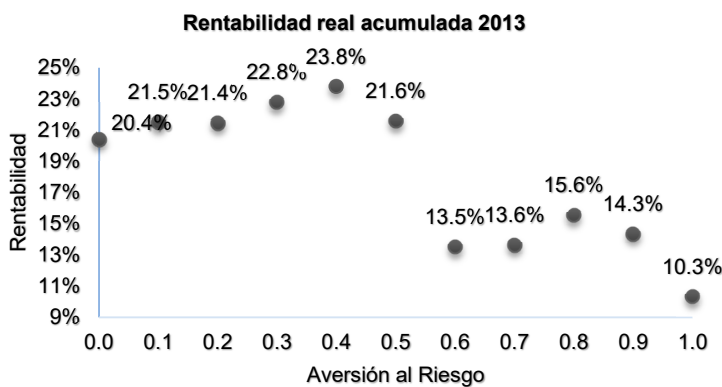
Tabla 6: Rendimientos Reales Obtenidos Para el Año 2013

Aversión al riesgo (r).	Mes 012013	Mes 022013	Mes 032013	Mes 042013	Mes 052013	Mes 062013	Mes 072013	Mes 082013	Mes 092013	Mes 102013	Mes 112013	Mes 122013
0.0	-6.48%	-2.82%	-5.71%	-2.50%	-0.37%	-1.43%	5.84%	-1.41%	-3.40%	-3.47%	4.90%	43.78%
0.1	-6.48%	-2.82%	-5.71%	-2.50%	-0.37%	-1.43%	5.40%	-1.41%	-3.40%	-2.18%	4.90%	43.78%
0.2	-6.48%	-2.82%	-5.66%	-2.50%	-0.37%	-1.43%	4.84%	-1.41%	-3.40%	-1.77%	4.90%	43.78%
0.3	-6.48%	-1.69%	-5.37%	-2.78%	-0.37%	-1.43%	4.65%	-1.43%	-3.40%	-1.63%	4.90%	43.78%
0.4	-6.48%	-0.65%	-5.23%	-3.39%	-0.37%	-1.18%	4.56%	-1.43%	-3.40%	-1.56%	4.90%	43.78%
0.5	-6.24%	-0.02%	-5.14%	-3.76%	-0.37%	-0.90%	4.50%	-1.49%	-3.40%	-1.51%	2.20%	43.78%
0.6	-4.58%	0.39%	-5.08%	-4.00%	-0.37%	-0.72%	4.46%	-1.30%	-3.23%	-1.44%	1.47%	31.75%
0.7	-2.60%	0.69%	-5.04%	-4.17%	2.21%	-0.59%	4.44%	0.52%	-2.92%	-1.39%	0.14%	24.54%
0.8	-0.42%	0.91%	-4.30%	-4.30%	4.14%	-0.50%	4.42%	1.88%	-2.63%	-0.72%	-0.86%	18.85%
0.9	1.30%	1.71%	-2.66%	-4.41%	5.35%	-0.42%	4.40%	2.94%	-2.40%	-0.65%	-2.29%	11.66%
1.0	0.36%	0.58%	-0.39%	-0.92%	1.48%	-2.87%	7.44%	3.32%	4.67%	-0.81%	-4.12%	1.68%

En esta tabla se presentan los rendimientos reales obtenidos, a partir de conformación de portafolios para cada mes después de la aplicación del modelo de programación no lineal durante el año 2013 cambiando el nivel de aversión al riesgo del inversionista. Fuente: Datos (BVC, 2013) Cálculos propios.

En la Figura 2 se puede observar las rentabilidades reales acumuladas durante el 2013 versus el nivel de aversión al riesgo después de aplicar el modelo de programación no lineal.

Figura 2: Rentabilidad Real Acumulada Año 2013 en Función de la Aversión al Riesgo



Esta figura presenta la rentabilidad acumulada para el año 2013 según nivel de aversión al riesgo que hubiera obtenido un inversionista después de la aplicación del modelo propuesto. Los datos muestran comportamientos positivos durante el año 2013. Fuente: Datos (BVC, 2013) Cálculos propios.

La conformación de portafolios generó rentabilidades acumuladas positivas, obteniéndose una máxima ganancia de 23.8% con un nivel de aversión  $r = 0.4$  mientras que con un  $r = 1$  se obtuvo una ganancia de 10.3% anual. Para este año el modelo presentó un buen desempeño, debido a las condiciones favorables del mercado. Para determinar la validez del modelo en el año 2013, se hace una comparación de los resultados obtenidos con los datos oficiales de rentabilidades proporcionados por la Superintendencia Financiera de Colombia, en su informe: Rentabilidad Fondos de Pensiones Obligatorias a 31/12/2013 en el cual se establece una rentabilidad promedio de los fondos de pensiones (Protección, Skandia, Colfondos, Porvenir, Horizonte), como se muestra en la Tabla 7 (Superfinanciera, 2014). Estos Fondos de Pensiones

Obligatorias corresponden a grandes inversionistas institucionales en el mercado accionario colombiano y por tal motivo se les toma como patrón de comparación, con respecto a las rentabilidades obtenidos por los mismos en el año de inversión.

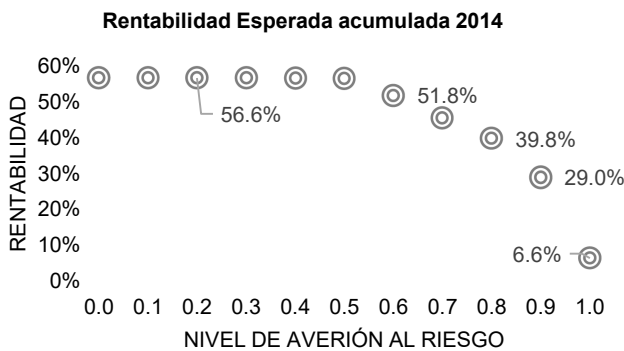
Tabla 7: Rentabilidades Acumuladas 3 Años Fondos de Pensiones Obligatorias a Diciembre 31 / 2013

Fondo	Moderado	Conservador	Mayor riesgo
	Ago/11 - dic/13	Ago/11 - dic/13	Ago/11 - dic/13
Proteccion	13.78%	6.59%	9.30%
Colfondos	12.83%	7.01%	8.32%
Porvenir	13.31%	6.99%	11.00%
Skandia	12.80%	6.77%	7.93%
Bbva horizonte	12.99%	7.11%	10.38%
Promedio ponderado	13.14%	6.89%	9.39%

En esta tabla se presentan los rendimientos reales obtenidos por cinco fondos de pensiones con inversiones en el mercado colombiano. Se comparan los resultados obtenidos según el perfil del inversionista. Fuente: (Superfinanciera, 2015)

Comparando los resultados de la Tabla 7 obtenidos por los Fondos de Pensiones Obligatorias con los datos obtenidos por el modelo de optimización de propuesto (Figura 2), se puede concluir que el modelo tuvo un buen comportamiento acorde con las condiciones del mercado e incluso obteniendo rentabilidades superiores que los conseguidos por estos fondos a diferentes perfiles de inversionista. Es de resaltar, que a niveles bajos de aversión al riesgo ( $r < 0.5$ ) se obtuvieron los mayores rendimientos del portafolio. Con respecto al año 2014 y siguiendo el mismo procedimiento utilizado para la conformación de portafolios a partir de la optimización del modelo, se presentan en la Figura 3 los rendimientos esperados para el año 2014 por las carteras arrojadas por el modelo.

Figura 3: Rentabilidad Esperada Acumulada Para el Año 2014 En Función de la Aversión al Riesgo



Esta figura presenta la rentabilidad acumulada para el año 2014 según nivel de aversión al riesgo que esperaría obtener un inversionista después de la aplicación del modelo propuesto. Los datos muestran comportamientos positivos durante el año 2014. Fuente: Datos (BVC, 2014) Cálculos propios.

En la Tabla 8 se muestran los rendimientos reales mensuales y acumulados durante el año 2014 por nivel de aversión al riesgo, después de aplicar el modelo de programación no lineal para cada uno de los 12 meses de evaluación del portafolio.

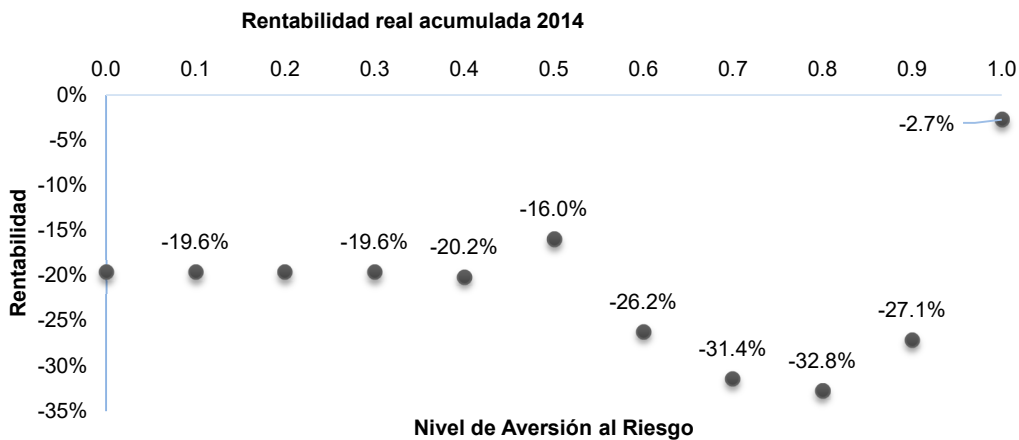
Tabla 8: Rendimientos Reales Obtenidos Para el Año 2014

Aversión al riesgo (r).	Mes 012014	Mes 022014	Mes 032014	Mes 042014	Mes 052014	Mes 062014	Mes 072014	Mes 082014	Mes 092014	Mes 102014	Mes 112014	Mes 122014
0.0	-4.17%	4.84%	-4.77%	17.29%	13.91%	3.52%	1.16%	-1.48%	19.88%	2.00%	-7.95%	-1.06%
0.1	-4.17%	4.84%	-4.77%	17.29%	13.91%	-3.52%	1.16%	-1.48%	-19.88%	2.00%	-7.95%	-1.06%
0.2	-4.17%	4.84%	-4.77%	17.29%	13.91%	3.52%	1.16%	-1.48%	19.88%	2.00%	-7.95%	-1.06%
0.3	-4.17%	4.84%	-4.77%	17.29%	13.91%	3.52%	1.16%	-1.48%	19.88%	2.00%	-7.95%	-1.06%
0.4	-4.17%	4.84%	-4.77%	17.29%	13.91%	-3.52%	1.16%	-1.48%	19.88%	2.00%	-7.95%	-1.71%
0.5	-4.17%	4.84%	-4.77%	17.29%	13.91%	-3.52%	1.16%	-0.96%	-17.62%	2.00%	-7.88%	-1.46%
0.6	-4.75%	4.18%	-4.35%	14.00%	13.91%	-3.52%	1.90%	-0.61%	-15.87%	0.34%	-7.79%	-0.86%
0.7	-5.62%	3.36%	-1.90%	8.84%	13.91%	-1.94%	2.12%	-0.37%	-14.62%	-1.14%	-7.73%	-1.61%
0.8	-6.68%	2.67%	0.90%	5.09%	12.59%	-0.59%	2.29%	-0.19%	-13.68%	-2.35%	-6.61%	-5.81%
0.9	-8.20%	2.47%	2.80%	2.11%	-8.27%	1.17%	2.78%	0.03%	11.13%	-2.47%	-4.40%	-7.33%
1.0	-8.16%	5.18%	4.49%	-0.05%	-3.52%	4.80%	3.48%	2.55%	-5.63%	-2.45%	-4.01%	1.68%

En esta tabla se presentan los rendimientos reales obtenidos, a partir de conformación de portafolios para cada mes después de la aplicación del modelo de programación no lineal durante el año 2014 cambiando el nivel de aversión al riesgo del inversionista. Fuente: Datos (BVC, 2014) Cálculos propios.

Por otra parte, en la Figura 4 se pueden observar las rentabilidades reales acumuladas durante el 2014 versus el nivel de aversión al riesgo después de aplicar el modelo de programación no lineal.

Figura 4: Rentabilidad Real Acumulada Año 2014 En Función de la Aversión al Riesgo



Esta figura presenta la rentabilidad acumulada para el año 2014 según nivel de aversión al riesgo que hubiera obtenido un inversionista después de la aplicación del modelo propuesto. Los datos muestran comportamientos negativos durante el año 2014. Fuente: Datos (BVC, 2014) Cálculos propios.

En la figura 4 se muestra que el año 2014 generó rentabilidades acumuladas negativas en todos los escenarios simulados con la optimización del modelo, obteniendo el valor más alto (en pérdida) con un nivel de aversión de  $r = 0.4$  de -20.2%. Dentro de estas condiciones desfavorables, se resalta la rentabilidad obtenida por la conformación de un portafolio conservador con un  $r = 1$  con un valor de -2.7%. Para determinar la validez del modelo en el año 2014, se hace nuevamente una comparación de los resultados obtenidos con los datos oficiales de rentabilidades de los Fondos de Pensiones Obligatorias a 31/12/2014. En la Tabla 9 se presentan estos resultados.

Tabla 9: Rentabilidades Acumuladas 3 Años Fondos de Pensiones Obligatorias a Diciembre 31 / 2014

Fondo	Moderado	Conservador	Mayor Riesgo
	DIC/11 - DIC/14	DIC/11 - DIC/14	DIC/11 - DIC/14
Proteccion	8.33%	7.59%	8.60%
Porvenir	8.91%	7.77%	8.08%
Old mutual (skandia)	8.75%	7.80%	7.91%
Colfondos	8.80%	8.25%	10.35%
Promedio ponderado	<b>8.67%</b>	<b>7.79%</b>	<b>8.49%</b>

En esta tabla se presentan los rendimientos reales obtenidos por cinco fondos de pensiones con inversiones en el mercado colombiano. Se comparan los resultados obtenidos según el perfil del inversionista. Fuente: (Superfinanciera, 2015a)

Comparando los resultados de la Tabla 9 obtenidos por los Fondos de Pensiones Obligatorias con los datos obtenidos por el modelo de optimización de propuesto (Figura 4), se puede concluir que el modelo tuvo un mal comportamiento acorde con las condiciones del mercado e incluso obteniendo rentabilidades inferiores que los conseguidos por estos fondos. Es importante tener en cuenta que los rendimientos presentados por los fondos corresponden a rendimientos acumulados y no muestran el rendimiento real del año 2014. Sin embargo, se puede notar que los rendimientos del año 2014 presentan una disminución con respecto al año anterior para los tres escenarios presentados (moderado, conservador y mayor riesgo). Para ver específicamente lo sucedido en el año 2014, un año de alta volatilidad y de caídas de las principales bolsas de valores mundiales, debido en gran parte a lo sucedido con los precios del petróleo y a problemas coyunturales, se toman los rendimientos obtenidos por los portafolios de inversión del Fondo Protección y se hace la comparación con los datos del modelo.

Tabla 10: Rentabilidades Portafolios de Inversión PROTECCIÓN Fondo de Pensiones Voluntarias Para el Año 2014

Portafolio De Inversión _PROTECCIÓN	Semestral	Anual
<b>accionespesos</b>	<b>-39.26%</b>	<b>-12.40%</b>
proteccionbalanceadomoderado	2.06%	6.15%
rentafijalargoplazo	1.16%	4.91%
accionesisagen	10.61%	-4.57%
accionesecopetrol	-68.17%	-41.96%
sectormineroenergetico	-19.23%	0.75%
accionesgruposura	-42.01%	-8.14%
accionesbancolombia	-29.48%	-9.27%
accionesgrupoargos	-50.13%	-27.55%
accionescementosargos	-48.90%	-19.62%
accionesnutresa	-36.58%	-22.21%
accionesisa	-40.07%	-22.94%
accionesexito	-46.77%	-26.00%
accionesgrupoaval	-40.22%	-24.46%
accionesdavivienda	-31.57%	-21.65%
proteccion30	3.27%	3.08%

En esta tabla se muestran los rendimientos reales obtenidos por los principales fondos de inversión en el mercado accionario colombiano. Fuente: Portal Financiero Protección

Los resultados presentados en la Tabla 10 presentan una correlación directa con los datos obtenidos por el modelo, donde se muestra los rendimientos reales obtenidos en el año 2014. Además, se evidencia que el año 2014 presentó resultados negativos para portafolios conformados con acciones de la Bolsa de valores de Colombia. Sólo se presentan resultados positivos para portafolios balanceados y conformados con títulos

de renta fija. Esta evidencia permite concluir que a pesar que los resultados entregados por el modelo propuesto son rendimientos negativos, esto datos son congruentes con la situación económica del momento. Además, comparando la rentabilidad presentada a niveles altos de aversión al riesgo con un portafolio de acciones en pesos de Protección se obtienen mejores resultados, ya que con un  $r = 1$  (portafolio de características similares) la rentabilidad arrojada por el modelo es de -2.7% y para el portafolio de Protección la rentabilidad obtenida fue de -12.4%.

## CONCLUSIONES

Con base en los resultados arrojados se comprueba la validez del modelo en el mercado de renta variable colombiano, al arrojar en un 100% rendimientos positivos para los diferentes niveles de aversión al riesgo en el año 2013, es así como con un nivel de aversión al riesgo de 0.4 se obtuvo el mayor rendimiento acumulado del portafolio del 23.8% anual que contrastado con los datos oficiales proporcionados por la Superintendencia Financiera de Colombia, en su informe: Rentabilidad Fondos de Pensiones Obligatorias a 31/12/2013 en el cual se establece una rentabilidad promedio de los fondos de pensiones (Protección, Skandia, Colfondos, Porvenir, Horizonte, ING) desde 01/01/2011 hasta 31/12/2013 del 13.14% anual inferior a la rentabilidad arrojada por el modelo. A pesar que los resultados que el modelo arrojó para el año 2014 fueron todos negativos, son coherentes con la situación económica del momento. Además, comparando la rentabilidad presentada a niveles altos de aversión al riesgo con un portafolio de acciones en pesos de Protección se obtienen mejores resultados, ya que con un  $r = 1$  (portafolio de características similares) la rentabilidad arrojada por el modelo es de -2.7% y para el portafolio de Protección la rentabilidad obtenida fue de -12.4%. El modelo planteado es consistente en el sentido de excluir en muchos de los portafolios a aquellas acciones que presentaban mayor riesgo y menor rentabilidad.

En la medida que se construyan modelos que reflejen más de cerca la realidad, permitirá que se tomen decisiones de inversión más acertadas. Todas las personas no poseen las mismas expectativas de inversión por ello es de gran utilidad el nivel de aversión al riesgo, ya que con ésta se selecciona la cartera óptima de inversión para cualquier tipo de inversionista. Se resalta que a pesar de que algunos activos disponibles para conformar el portafolio mostraron rendimientos negativos durante el periodo de estudio (2013-2014) el modelo realizó una buena diversificación a la hora de establecer el portafolio. El modelo propuesto reacciona directamente con las condiciones del mercado de valores colombiano, arrojando mejores resultados en períodos con condiciones favorables y niveles altos de confianza a nivel macroeconómico. En este artículo sólo se consideraron los activos financieros del mercado colombiano. En futuras investigaciones, sería interesante analizar la validez del modelo propuesto con la conformación de portafolios con activos del mercado global colombiano o con ETFs, con el fin de disminuir el riesgo de mercado asociado a títulos del mismo país. Este análisis podrá ser aplicado a los mercados de renta variable de otros países de América Latina. En este estudio se usó el modelo de programación no lineal para la conformación de los portafolios. En futuros estudios se podría utilizar el método estocástico para la conformación de portafolios de inversión.

## REFERENCIAS

Aouni, B., Ben Abdelaziz, F., & Martel, J. M. (2005). Decision-maker's preferences modeling in the stochastic goal programming. *European Journal of Operational Research*, 162, 610–618.

Artzner, P; Delbaen, F; Eber, J y Heath, D. (1998). "Coherent Measures of Risk", Working Paper, pp. 1-24.

Becerra, O. y Melo, L. (2008). "Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones", *Borradores de Economía*, No. 489, pp. 1-96.

- Ben Abdelaziz, F., El Fayedh, R., & Rao, A. (2009). A discrete stochastic goal program for portfolio selection: The case of United Arab Emirates equity market. *Information Systems and Operational Research*, 47, 5–13.
- Dubova, I. (2005). La validación y aplicabilidad de la teoría de portafolio en el caso colombiano. En: Cuadernos de Administración, Volumen 18, N°30, julio-diciembre de 2005, pp. 241-279 (Fecha de consulta: 24 de agosto de 2012). <http://www.scielo.org.co>
- Elton, E. J., & Gruber, M. J. (1987). *Modern portfolio theory and investment analysis* (3rd ed.). New York: Wiley.
- Fang, Y., Lai, K.K., Wang, S.Y., 2006. Portfolio rebalancing model with transaction costs based on fuzzy decision theory. *European Journal of Operational Research* 175, 879–893.
- Ho, Y. Strange, R. and Piesse, J. (2000). CAPM anomalies and the pricing of equity: vidence from the Hong Kong market. En: *Applied Economics*, Volume 32, Issue 12, Octubre 2000. P.p 1629-1636. (Fecha de consulta: 6 de octubre de 2012).<http://www.informaworld.com/smpp/content~content=a713758447>
- Konno, Hiroshi y Annista, Wijayanayake (1999). “Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model Under Transaction Cost”, *Journal of the Operations Research*, Vol. 42, No. 4, pp. 422-435.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. En: *The Journal of Finance*, 7, 77-91.
- Martínez, C.; Restrepo, J. y Velásquez, J. (2004). Selección de portafolios usando simulación y optimización bajo incertidumbre. En: *Revista Dyna*, N°141, Marzo de 2004, pp. 35-57. <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=49614106>
- Ragsdale, C. T. (2006). *Spreadsheet Modeling & Decision Analysis* (p. 132). Cincinnati, OH, USA: Thomson Nelson.
- Ruppert, D. (2004). *Statistics and finance: An introduction*. Springer Science & Business Media.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk\*. *The journal of finance*, 19(3), 425-442.
- Superfinanciera (2015). Superintendencia Financiera de Colombia. Retrieved 03 15, 2015, from Informe de Rentabilidad Fondos de Pensiones Obligatorias 31/12/2013: <http://www.superfinanciera.gov.co/Cifras/financiera/pensiones/ahorroindividual/estadisticas/rfpo2013.xls>
- Superfinanciera (2015a). Superintendencia Financiera de Colombia. Retrieved 03 15, 2015, from Informe de Rentabilidad Fondos de Pensiones Obligatorias 31/12/2014: <http://www.superfinanciera.gov.co/Cifras/financiera/pensiones/ahorroindividual/estadisticas/rfpo2014.xls>
- Tobin, J. (1958). Estimation of relationships for limited dependent variables. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, 24-36.
- Vélez-Pareja, I. (2001). Selección del portafolio óptimo: Una nota. Septiembre de 2001. (Fecha de consulta: 29 de agosto de 2012). <http://www.ftsmoedules.com/public/texts/capmtutor/capmcont.htm>
- Zhang, Wei; Xiao, Wei and Wang, Ying (2008). “A Fuzzy Portfolio Selection Method Based on Possibilistic Mean and Variance”, *Soft Computing*, Vol. 13, No. 6, pp. 627-633.



Zopounidis, C., & Doumpos, M. (2002). Multi-criteria decision aid in financial decision making: Methodologies and literature review. *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, 11(4-5), 167-186.

Zopounidis, C., & Doumpos, M. (2013). Multicriteria decision systems for financial problems. *Top*, 21, 241-261.

## **BIOGRAFÍA**

John Dairo Ramírez Aristizábal es Ingeniero Industrial y Magister en Ingeniería de la Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Coordinador del Programa académico Administración Financiera de la Institución Universitaria ESUMER. Miembro del grupo de investigación GIDE. Correo electrónico [john.ramirez99@esumer.edu.co](mailto:john.ramirez99@esumer.edu.co).

Eduardo Alexander Duque Grisales es Ingeniero Químico y Magister en Ingeniería Administrativa de la Universidad Nacional, Medellín, Especialista en Formulación y Evaluación de proyectos de la Institución Universitaria ITM, Medellín, Colombia. Docente investigador de tiempo Completo de la Institución Universitaria ESUMER. Miembro del grupo de investigación GIDE. Correo electrónico [eduardo.duque@esumer.edu.co](mailto:eduardo.duque@esumer.edu.co).

